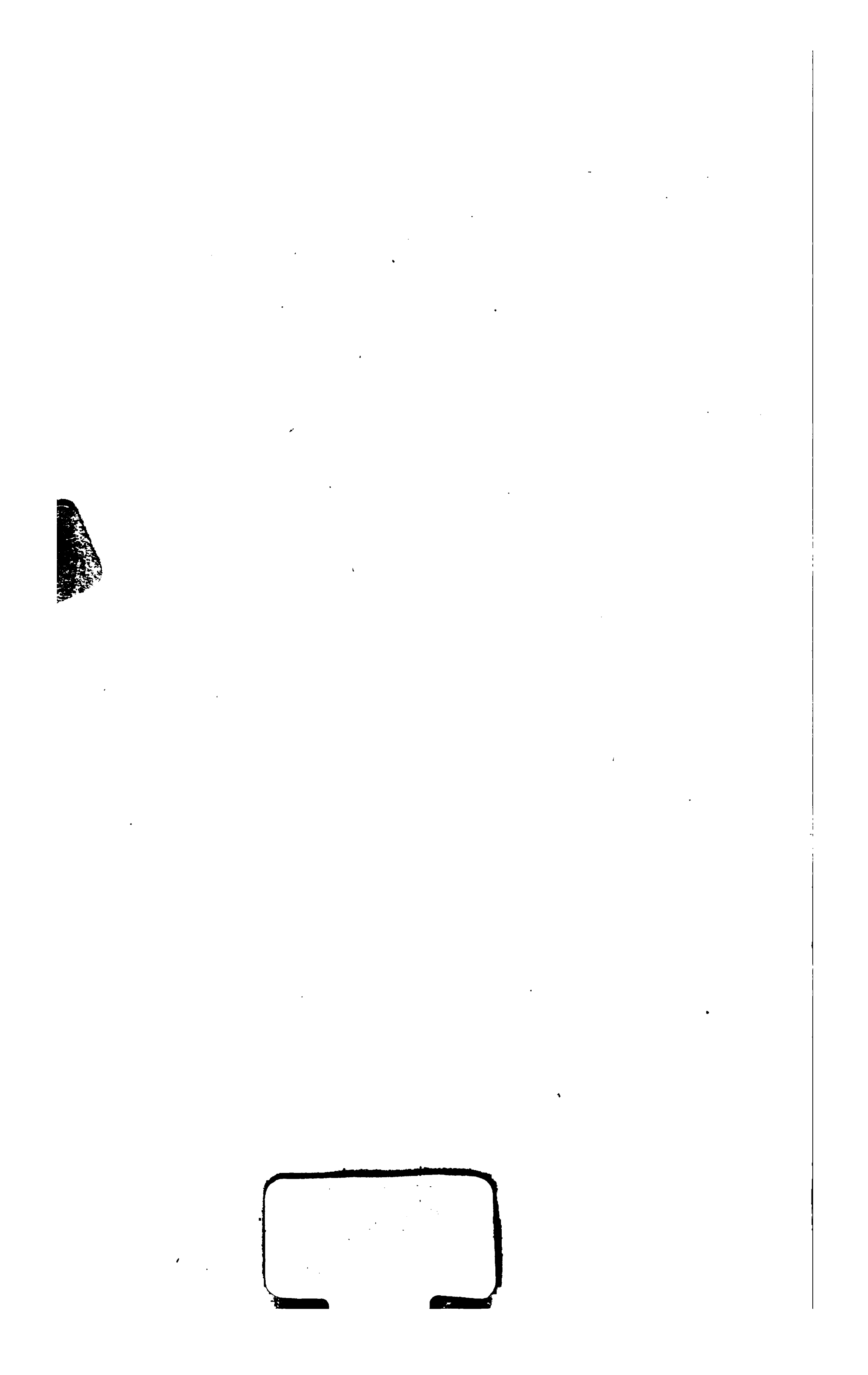
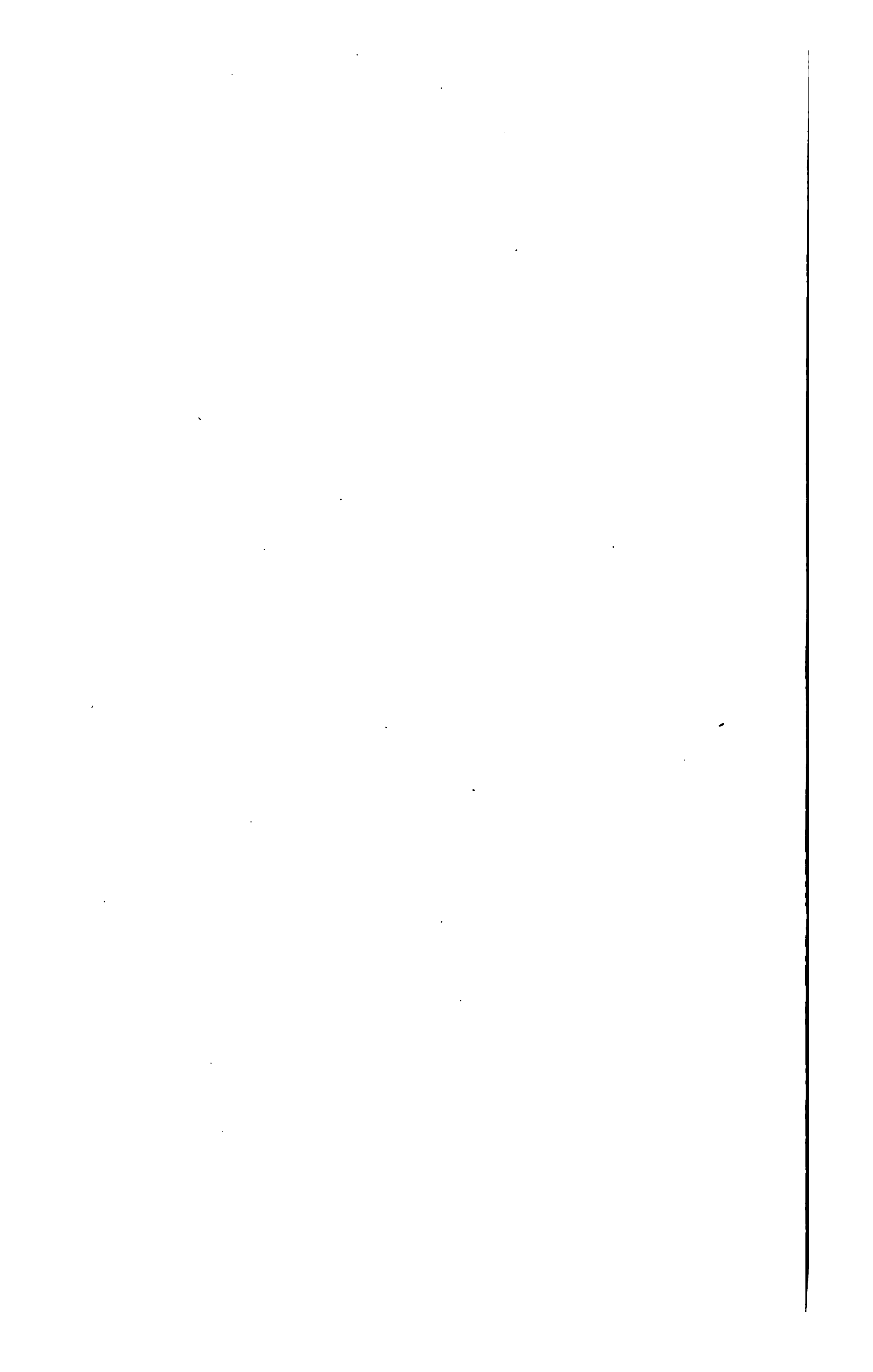

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909624 0





ZUR

MORPHOLOGIE DER POLYEDER

VON

DR. V. EBERHARD,

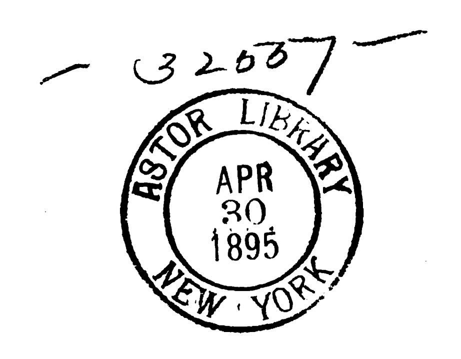
PRIVATDOCENT AN DER UNIVERSITÄT ZU KÖNIGSBERG I. P.

MIT VIELEN FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1891.


ASTOR LIBRARY
APR
30
1895
NEW YORK

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Grundlagen einer Morphologie der convexen Polyeder.

Zweiter Abschnitt.

Eine Klassifikation der allgemeinen convexen Polyeder.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Elementarerweiterungen.

Vierter Abschnitt.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung und ihre geometrischen Konstruktionen.

Einleitende Uebersicht.

Unter allen räumlichen Gebilden sind die convexen Polyeder dadurch ausgezeichnet, dafs sie bei gröfstmöglicher Einfachheit der Bildungsweise und entsprechender Klarheit der Vorstellung dem Beobachter eine aufserordentliche Formenmannigfaltigkeit offenbaren.

Abgesehen von den zahlreichen in der Natur vorkommenden Körpern, welche, wie beisp. die Krystalle bestimmte Polyedertypen unmittelbar zur Anschauung bringen, bietet die wiederholte Operation des Zerschneidens eines geeigneten Körpers ein Mittel, die Zahl der darstellbaren Typen nach Belieben zu vermehren. Läfst aber die Trivialität dieser Operationen und die verschiedene Vollkommenheit ihrer Erzeugnisse ein besonders klares Bild abstrahieren, so wird durch die Möglichkeit der Verkörperung eines jeden Polyedertypus das Interesse für die gestaltlichen Eigentümlichkeiten und den organischen Zusammenhang dieser, den ursprünglichsten Bildungsgesetzen unterliegenden Gebilde gesteigert.

Die bisherigen den Gegenstand betreffenden Untersuchungen sind doppelter Art. Entweder beziehen sie sich auf das Problem*), alle Polyeder mit gleichen und ähnlichen Grenzpolygonen zu bestimmen, oder sie stellen sich die Aufgabe**), eine Classification der Polyeder nach dem Princip der Symmetrie zu entwickeln. Das erste, schon von den Alten gekannte Problem schränkt die Betrachtung von vornherein auf eine kleine Gruppe sehr specieller Polyederformen ein und hat mit deren vollständiger Aufstellung seine Erledigung gefunden.

---

*) Hefs: Einleitung in die Lehre von der Kugelteilung. Leipzig 1883.

**) C. Jordan: Recherches sur les polyèdres. Crelle's Journal, Band 66 und 68.

Das zweite, von C. Jordan gestellte Problem hat diesen zu einer Einteilung der convexen Polyeder in neun Classen geführt.

Es mag ferner noch bemerkt werden, dafs Steiner*) zuerst in den Gergonne'schen Annalen Band 18—19 und ein zweites Mal in dem Anhang zur systematischen Entwicklung etc. die Frage gestellt hat, wie sich die Anzahl der von n Ebenen gebildeten verschiedenen convexen Polyeder berechnet. Indessen ist eine Antwort auf diese Frage von keiner Seite erfolgt.

Die vorerwähnten Untersuchungen boten dem Verfasser für das Studium der gegenseitigen systematischen Abhängigkeit der verschiedenen Polyederformen keinerlei Anhaltspunkte dar. Vielmehr zeigte es sich bald, dafs die Wege, welche den erstrebten Einblick gestatteten, erst noch geschaffen werden mufsten. Dieser Umstand, sowie der Umfang der behandelten Materie, läfst es wünschenswert erscheinen, von dem eingeschlagenen Gedankengange und den gewonnenen Ergebnissen eine kurze Uebersicht zu geben.

Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit der Entwickelung der für eine vergleichsweise Betrachtung der convexen Polyeder in morphologischem Sinne grundlegenden Begriffe und Vorstellungen. Unter Auffassung der Grenzflächen eines Polyeders als seiner ursprünglichen, der Ecken und Kanten als seiner abgeleiteten Bestimmungsstücke werden in § 1 zunächst die Begriffe der gleichgestalteten oder isomorphen und der ungleichgestalteten oder allomorphen convexen Polyeder festgelegt. Danach werden zwei, durch die gleiche Zahl von Grenzebenen bestimmte Polyeder als einander isomorph definiert, wenn eine derartige paarweise Zuordnung ihrer Grenzebenen existiert

$$A_n \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \quad B_n \equiv \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n,$$

(gleich indicierte Ebenen als zugeordnet aufgefafst), dafs jeder Grenzecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ von A_n auch wieder eine Grenzecke $(\beta_i, \beta_k, \beta_l)$ von B_n entspricht; dagegen werden sie allomorph genannt, wenn keine solche Zuordnung vorhanden ist. Diese Definition läfst, wie in § 2 des weitern ausgeführt wird, nächst

*) Steiner, ges. Werke. Band I, S. 277, 454.

der Anzahl der Ecken als wichtigste morphologische Merkmale eines Polyeders die Formen (Seitenanzahlen) der einzelnen Grenzpolygone und deren Zusammensetzungsart erkennen. Indem daher die Anzahlen x_h der h-seitigen Grenzflächen des betrachteten n-eders eingeführt werden, ergiebt sich zwischen denselben die Relation

$$3x_3+2x_4+x_5-x_7-2x_8-3x_9-\cdots-(n-7)x_{n-1}=4n-2r,$$

in welcher r die Zahl der Ecken des Körpers bezeichnet. Aus dem Umstande, dafs die rechte Seite der Gleichung stets einen positiven Wert hat, der im Minimum 12 beträgt, folgt der in § 3 gegebene erste Fundamentalsatz, dafs nämlich jedes convexe Polyeder aus einem Tetraeder durch die ausschliefsliche Anwendung drei-, vier- und fünfseitiger ebener Schnitte, d. h. in der Weise construiert werden kann, dafs von dem Tetraeder und jedem resultierenden Körper durch die neu einzuführende Grenzebene entweder eine Ecke, oder eine Kante, oder ein in einer Ecke zusammenstofsendes Kantenpaar abgeschnitten wird. Die Verbindung dieses Satzes mit den § 4 und § 5 abgeleiteten Hilfssätzen führt in § 6 zu dem zweiten F.-Satze von der Continuität aller isomorphen Polyeder eines bestimmten allgemeinen Typus.

In dem zweiten Abschnitte wird die Art der Zusammensetzung des allgemeinen convexen Polyeders aus seinen Grenzpolygonen näher studiert. Demgemäfs wird in § 7 der Begriff des constituierenden oder des Stammsystemes als desjenigen Systemes von Grenzflächen eingeführt, welche die für die Gestalt des Polyeders notwendigen und hinreichenden Daten enthalten. Man findet, dafs ein Flächensystem dann und nur dann ein constituierendes ist, wenn in seinen Flächen alle Ecken des Polyeders und in jeder einzelnen mindestens eine solche Ecke auftritt, durch welche keine zweite Fläche des Systems hindurchgeht. Als für das einzelne Stammsystem charakteristisch zeigen sich dabei folgende Stücke: die Anzahl der Flächen des Systems, die Anzahl der in je einer Ecke zusammenstofsenden Flächentripel, die Zahl der Flächenpaare mit gemeinsamer Kante, der sogenannten Seitenflächenpaare, die Zahl der Flächenpaare mit je einer oder mehreren ge-

1*

meinsamen Scheitelkanten, nämlich derjenigen Paare von Flächen, die durch die beiden Grenzecken der gemeinsamen Grenzkante zweier anderen Flächen des Polyeders gehen, endlich durch die Reihenfolge der zu einer Fläche gehörigen Seiten- und Scheitelflächen. Für die Polyeder mit gleicher Flächenzahl sind die erstgenannten vier Anzahlen an bestimmte Relationen gebunden, aus denen (vergl. § 8) die verschiedenen Typen successive abgeleitet werden können, ein Verfahren, das für die Heptaeder vollständig durchgeführt wird.

An die Betrachtung der constituierenden Flächensysteme schliefst sich in § 9 eine Classification der allgemeinen convexen Polyeder. Es wird nämlich untersucht, wann die Grenzpolygone eines allgemeinen convexen Polyeders ein, zwei oder drei getrennte vollständige Systeme von Scheitelflächen bilden, unter einem solchen ein System von Grenzpolygonen verstanden, in welchem die Scheitelflächen einer Seitenfläche selbst wieder Systemflächen sind. Dabei ergiebt sich, dafs für jedes $n \geqq 8$ in der That n-eder jeder Classe existieren. Letztere sind dadurch unterschieden, dafs ein Polyeder der ersten Classe mindestens zwei Flächen mit unpaarer Seitenzahl besitzt, die weder unmittelbare noch mittelbare Scheitelflächen sind, dafs ein Polyeder der zweiten Classe in dem einen Systeme von Scheitelflächen alle Flächen mit unpaarer, in dem andern nur Flächen mit paarer Seitenanzahl enthält, und dafs bei einem Polyeder der dritten Classe überhaupt nur Flächen mit paarer Seitenanzahl vorhanden sind. Der Abschnitt schliefst mit der § 10 durchgeführten Bestimmung der Polyeder mit durchweg isomorphen Ecken, Körper, welche zu den archimedischen in naher Beziehung stehen.

Nach den mehr vorbereitenden Betrachtungen der beiden ersten Abschnitte wendet sich die Untersuchung im dritten Abschnitt der eigentlichen Frage zu. Den Ausgangspunkt in § 11 bildet die für die allgemeinen convexen Polyeder charakteristische Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12.$$

Die Unabhängigkeit derselben von der Anzahl x_6 der Grenzsechsecke deutet auf eine gewisse Unabhängigkeit dieser An-

zahl von den übrigen Anzahlen x_h hin. Es entsteht somit der Gedanke der Möglichkeit einer Einschaltung bezw. Ausscheidung von Grenzsechsecken in die Oberfläche des Polyeders, einer sogenannten Elementarerweiterung, bezw. Elementarreduction desselben. Da die Erweiterungs- wie die Ausscheidungsfläche notwendig von mindestens zwei oder mehreren Kantenpolygonen des Polyeders berandet wird, so macht ein Eingehen auf diese Verhältnisse einige Vorbemerkungen erforderlich.

Dementsprechend handeln die §§ 11 und 12 von den einfachen, d. h. denjenigen Kantenpolygonen der Polyeder, bei deren Umlauf durch einen Punkt jede Kante nur einmal passiert wird. Jedes derartige Polygon P teilt die Oberfläche des Polyeders in zwei getrennte Stücke S_1, S_2, als deren gemeinsame Berandung es eine zweiseitige Auffassung darbietet. Als Randpolygon $P(S_1)$ der Fläche S_1 erscheint es charakterisiert: erstens durch die Anzahl derjenigen Grenzpolygone von S_1, mit denen es einen Kantenzug gemein hat, zweitens durch die Anzahl der Kanten dieser Züge und drittens durch ihre Aufeinanderfolge; als Randpolygon $P(S_2)$ der Fläche S_2 aber durch die entsprechenden zu S_2 gehörigen Elemente. Bezeichnet a_h die Anzahl der h-gliedrigen ebenen Kantenzüge von P in Bezug auf S_1, b_h die entsprechende Zahl in Bezug auf S_2, und bedeutet k die Anzahl der Kanten des Polygones, so bestehen die Relationen:

1) $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots = k = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots,$

2) $a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots = b_1, \quad b_3 + 2b_4 + 3b_5 + \cdots = a_1,$

3) $a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = b_2 + b_3 + b_4 + \cdots.$

Unter den Kantenpolygonen P eines Polyeders bilden die zu den aufserhalb desselben gelegenen Punkten gehörigen Berührungspolygone ein geschlossenes System. Ein beliebiges Kantenpolygon kann durch seinen Charakter nicht ändernde, stetige Variationen des Polyeders allemal in ein Berührungspolygon übergeführt werden. — Irgend ein räumliches Polygon ist Kantenpolygon, wenn es von keiner der durch zwei aufeinanderfolgende Kanten gehenden Ebenen geschnitten wird. Es bleibt bei stetiger Variation sich selbst so lange isomorph,

als seine charakteristischen Merkmale ungeändert bleiben. Isomorphe Kantenpolygone können stets unter Erhaltung ihres Charakters stetig in einander übergeführt werden. Es folgt daraus der Satz, dafs zwei polyedrische Flächen S_1 und S_2, welche von ungleichseitig isomorphen Polygonen berandet werden, stets durch stetige, ihre Gestalt nicht alterierende Variationen zu einer einzigen Polyederfläche vereinigt werden können.

Auf dem letzten Satze basiert die § 14 entwickelte Definition enthaltender oder reducibeler Polyeder, welche die Grundlage der weiteren Theorie bildet.

Von einem Polyeder A_n wird gesagt, es enthält ein anderes Polyeder A_m oder nicht, je nachdem es möglich oder unmöglich ist, auf seiner Oberfläche eine Gruppe einander ausschliefsender, von Polygonen P berandeter Bestandteile S_i anzugeben, welche ebenso vielen die Oberfläche des enthaltenen Polyeders zusammensetzenden Flächen isomorph sind. Die aus einem enthaltenden Polyeder nach Ausschlufs der Bestandteile des enthaltenen entstehende, zwei- oder mehrfach berandete Fläche heifst eine Einschaltungs- oder Erweiterungsfläche des von den Randpolygonen der ausgeschiedenen Teile auf dem enthaltenen Polyeder gebildeten Netzes. Setzt sich die Einschaltungsfläche nur aus Grenzsechsecken zusammen, so wird sie eine Elementarfläche, das zu ihr gehörige Netz ein Elementarnetz genannt, und es wird A_m aus A_n als durch Elementarreduction, A_n aus A_m als durch Elementarerweiterung entstanden bezeichnet. Polyeder, die keine andern enthalten, heifsen irreducibele oder Stammpolyeder, alle diejenigen, in welchen sie selbst enthalten sind, aber abgeleitete Polyeder.

Das einfachste unter den Elementarnetzen ist das Elementarpolygon, dessen Erweiterungsfläche sich auf einen von zwei isomorphen Polygonen berandeten Elementargürtel reduciert. Die Theorie dieser Polygone bildet den Gegenstand der §§ 15, 16 und 17. Nachdem in § 15 ihre allgemeinen Eigenschaften entwickelt, und in § 16 eine besondere Art, die Normalpolygone, behandelt worden, wird in § 17 die Existenz von Normalpolygonen und damit die elementare Erweiterungsfähigkeit für jedes beliebige Polyeder nachgewiesen. Es führen

diese Untersuchungen auf eine zweite Classification der allgemeinen convexen Polyeder, bei welcher die gegenseitige Abhängigkeit der Kanten mafsgebend ist, die aber des Näheren zu besprechen hier zu weit führen würde.

Der § 18 führt einen neuen wichtigen Begriff, den Charakteristikenbegriff eines Kantenpolygones ein. Als die Charakteristik eines höchstens fünfkantige ebene Kantenzüge enthaltenden Polygones P wird der Zahlenwert des Ausdruckes definiert:

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 - b_3 - 2b_4 - 3b_5,$$

in welchem die a_h sich auf denjenigen Bestandteil S_1, S_2 des Polyeders beziehen, als dessen Randpolygon P aufgefafst ist. Der Grund zu dieser Definition liegt in dem Satze, dafs der vorstehende Ausdruck für zwei Randpolygone eines aus ebenen Grenzsechsecken bestehenden Gürtels sich, wenn überhaupt, nur im Vorzeichen unterscheidet. — Es werden dann die sogenannten Hexagonoide des Näheren behandelt, convexpolyedrische Flächen von unbegrenzter Ausdehnung, die aufser einem beliebigen, etwa c-kantigen, ebenen Grundpolygone nur noch Grenzsechsecke enthalten. Dabei ergiebt sich, dafs ein auf einem Hexagonoide H_c gezogenes Kantenpolygon P entweder die Charakteristik $\pm c$ oder die Charakteristik ± 6 hat, je nachdem es mit der Grundfläche einen Gürtel berandet oder nicht. Für den besonderen Fall $c = 6c'$ wird darauf nachgewiesen, dafs, wenn P_1 und P_2 zwei Polygone der Charakteristik $\pm 6c'$ sind, das eine nicht einen dem anderen isomorphen Kantenzug enthalten kann, eine Eigenschaft, welche als diejenige der Irreducibilität der Kantenpolygone eines Hexagonoides $H_{6c'}$ bezeichnet wird. Aus derselben und der vorherigen folgt, dafs ein beliebig im Raume gegebenes irreducibeles Kantenpolygon der Charakteristik $\pm 6c'$ mindestens *einem* Kantenpolygone eines Hexagonoides $H_{6c'}$ isomorph ist. — In § 19 werden diese Betrachtungen auf die Elementarpolygone und deren Elementargürtel oder zugehörige Elementarhexagonoide ausgedehnt. Man erkennt, dafs alle Elementarpolygone sich in unendlich viele Klassen sondern, deren jede die sämtlichen Elementarpolygone eines Elementarhexagonoides umfafst, welches zu einem durch zwei positive ganze Zahlen

$p, q = 1, 2, \ldots$ unzweideutig bestimmten Grundpolygone gehört. Es folgt daraus, dafs jedes Elementarpolygon die Charakteristik 0 hat, und ferner, dafs jedem in beschränkterem Sinne auch die Eigenschaft der Irreducibilität zukommt, endlich, dafs jedes entsprechend irreducibele Kantenpolygon der Charakteristik 0 ein Elementarpolygon ist. —

Durch die Verallgemeinerung des Charakteristikenbegriffs, welche derselbe in § 20 dahin erfährt, dafs als die Charakteristik eines ganz beliebigen Kantenpolygones der Ausdruck definiert wird:

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \cdots - b_3 - 2b_4 - 3b_5 - 4b_6 - \cdots,$$

gewinnt man ein für die Discussion der allgemeinen und im Besonderen der elementaren Netze wertvolles Hilfsmittel.

Die ersten auf die allgemeinen Netze bezüglichen Ausführungen des § 21 lehren, dafs, wenn die Oberfläche des Polyeders durch m Kantenpolygone $P_1, P_2, \ldots$ in m getrennte Bestandteile $S_1, S_2, \ldots$ zerschnitten wird, zwischen den Charakteristiken der P_i die Relation statt hat:

$$C(P(S_1)) + C(P(S_2)) + \cdots + C(P(S_m)) = 2 \cdot 3(m - 2).$$

Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn unter den Polygonen P_i die Randpolygone einer einteiligen, m-fach berandeten, nur Sechsecke enthaltenden polyedrischen Fläche verstanden werden. Nach weiterer Ableitung der Kriterien dafür, ob ein beliebiges Netz Elementarnetz ist, oder nicht, wird eine Methode entwickelt, wie die zu einem gegebenen Elementarnetze gehörigen Elementarerweiterungen des Polyeders successive gefunden werden können. Von den so, und zwar in unendlicher Anzahl, resultierenden Elementarflächen wird darauf in § 22 gezeigt, dafs nur eine bestimmte endliche Zahl derselben irreducibel ist, alle übrigen dagegen reducibel sind, d. h. dafs, wenn die irreducibelen Individuen bezeichnet werden durch

$$F_m', F_m'', \ldots F_m^{(\mu)},$$

jede andere Fläche $F_m^{(\mu+h)}$ mindestens eines derselben in sich enthält. Der § 23 bezieht sich auf eine für die allgemeinen convexen Polyeder invarianter Art des Elementarnetzes, nämlich desjenigen, welches bei jedem Polyeder durch dessen ebene Grenzpolygone gebildet wird. Unter den zugehörigen Elementar-

erweiterungen sind zwei von besonderem Interesse. Sie bestehen darin, dafs in dem einen Falle die sämtlichen Ecken, in dem anderen die sämtlichen Kanten des Polyeders durch Grenzsechsecke abgeschnitten werden. — In § 24 endlich werden einige den Elementarerweiterungen eines allgemeinen Polyeders gegenüber sich invariant verhaltende Eigenschaften desselben abgeleitet.

Die Entwickelungen des vierten und letzten Abschnittes beginnen in § 25 mit der nochmaligen Formulierung des eigentlichen Problemes. Zufolge Zerfällung der für die allgemeinen convexen Polyeder charakteristischen Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 12$$

in die beiden anderen

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots,$$

in welchen m notwendig eine positive ganze Zahl darstellt, läfst sich die Gesamtheit der Polyeder den aufsteigenden Werten $m = 0, 1, 2, \ldots$ entsprechend im Bereiche, die Polyeder eines bestimmten Bereiches gemäfs den verschiedenen Wertesystemen $x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, \ldots$ in Stämme, die Polyeder eines Stammes nach den in ihm vorhandenen irreducibelen oder Stammpolyedern aber in Familien einteilen. Dabei bieten sich naturgemäfs die Fragen dar:

1) Gehört zu jeder positiven ganzen Zahl m (0 incl.) ein Polyederbereich?

2) Definiert jedes ganzzahlige Lösungssystem

$$x_3, x_4, x_5, x_7, x_8, x_9, \ldots$$

der charakteristischen Gleichung einen Polyederstamm?

3) Ist die Zahl der Stammpolyeder eines jeden Stammes endlich?

Die Beantwortung dieser drei Fragen macht den Inhalt der §§ 26—29 aus. Es ergiebt sich, dafs alle drei zu bejahen sind. Zum Schlufs wird im § 29 noch eine allgemeine Bestimmungsmethode der Stammpolyeder eines gegebenen Stammes entwickelt und darauf an einem Beispiele durchgeführt.

Königsberg, im Juli 1890.

Erster Abschnitt.

Grundlagen einer Morphologie der convexen Polyeder.

§ 1. Isomorphe convexe Polyeder.

Zwei durch je n Ebenen abgegrenzte Körper sollen als *isomorph**) betrachtet werden, wenn nach beliebig, aber fest gewählter Bezeichnung der n Ebenen des einen durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

unter den $n!$ möglichen Benennungen der n Ebenen des anderen mittelst

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

mindestens eine von der Beschaffenheit existiert, dafs jeder Grenzecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ des einen wieder eine Grenzecke $(\beta_i, \beta_k, \beta_l)$ des anderen entspricht.

Aus dieser Definition isomorpher convexer Polyeder ergiebt sich sogleich deren Übereinstimmung in einer Reihe gestaltlicher Charaktere, nämlich:

a) in den Anzahlen der Ecken und in denjenigen der Kanten,

b) in den Anzahlen der h-$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{seitigen}}{\text{kantigen}}$ Grenz$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{flächen,}}{\text{ecken,}}$

c) in den Anzahlen der Kanten, in welchen je eine h_1- und eine h_2-$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{seitige}}{\text{kantige}}$ Grenz$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{fläche sich schneiden}}{\text{ecke gelegen sind}}$ u. s. w.

---

*) Es deckt sich diese Definition isomorpher convexer Polyeder ganz mit der Auffassung homologer Polyeder, welche C. Jordan seinen „Recherches sur les polyèdres“ (Borchardts Journal Band 66 und 68) zu Grunde gelegt hat. Vgl. auch dessen: Résumé de recherches sur la symétrie des polyèdres non eulériens, ibid. 66.

Alle diese Consequenzen finden ihren gemeinsamen und vollständigen Ausdruck in der Bedingung der Gleichheit der Anzahlen der Ecken bezw. Kanten entsprechender Flächenpaare, indem aus einer solchen Beziehung der beiden Körper unmittelbar Isomorphismus gefolgert werden kann. — Denn da dann einerseits die Flächen α_1 und α_2 mit den Flächen β_1 und β_2 in den Eckenanzahlen m_1 und m_2, andrerseits das System (α_1, α_2) mit dem System (β_1, β_2) in der Eckenanzahl μ übereinstimmt, so werden, je nachdem μ den Wert $m_1 + m_2$ oder den Wert $m_1 + m_2 - 2$ hat, die Flächen β_1 und β_2 zugleich mit α_1 und α_2 entweder *keine* oder *eine* gemeinsame Kante besitzen.

Gäbe es nun auf A_n eine Ecke $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, deren drei Seitenflächen auf B_n drei Flächen $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ entsprechen, die sich nicht auf, sondern erst aufserhalb B_n schneiden, so müfsten dieselben, da sie paarweise je eine Grenzkante bestimmen, eine Flächenzone bilden, welche die übrige Oberfläche des Polyeders in zwei völlig getrennte, für sich einfach berandete Bestandteile scheidet:

$$B' \equiv \beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_r', \quad B'' \equiv \beta_1'', \beta_2'', \ldots, \beta_s'',$$

und es könnte B_n keine Kante $| \beta_i', \beta_k'' |$ enthalten. Aus der Thatsache, dafs auf A_n die $n - 3$ Grenzpolygone

$$\alpha_1', \alpha_2', \ldots, \alpha_r' \quad \text{und} \quad \alpha_1'', \alpha_2'', \ldots, \alpha_s''$$

eine einzige einfach berandete Fläche zusammensetzen, folgt aber, dafs dieses Polyeder mindestens eine Kante $| \alpha_i', \alpha_k'' |$ und dafs folglich auch B_n mindestens eine Kante $| \beta_i', \beta_k'' |$ besitzt. Die obige bezüglich der drei Flächen $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gemachte Annahme ist mithin unzulässig, d. h. die drei Flächen bestimmen eine Ecke von B_n. Q. e. d.

In engerem Sinne ist eine doppelte Art des Isomorphismus convexer Polyeder zu unterscheiden. Zwei solche Körper

$$A_n \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \quad \text{und} \quad B_n \equiv \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$$

sollen gleich oder entgegengesetzt gerichtet heifsen, je nachdem zwei in entsprechenden Kanten

$$| \alpha_i, \alpha_k | \quad \text{und} \quad | \beta_i, \beta_k |$$

liegende, mit den Köpfen nach entsprechenden Ecken

$$(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l) \quad \text{und} \quad (\beta_i, \beta_k, \beta_l)$$

gerichtete, ins Innere der beiden Körper blickende Beobachter entsprechende Flächen

$$\alpha_i, \beta_i \text{ und } \alpha_k, \beta_k$$

zu gleichen Seiten, die einen zur rechten, die anderen zur linken haben oder nicht.

In der That kann nämlich aus der Gleichheit oder der Verschiedenheit der gegenseitigen Lage der durch zwei entsprechende Kanten $|\alpha_i, \alpha_k|$, $|\beta_i, \beta_k|$ gehenden correspondierenden Ebenen unmittelbar auf das analoge Verhältnis für jedes andere Paar zugeordneter Kanten geschlossen werden.

Sei ein solches gegeben durch

$$|\alpha_{i'}, \alpha_{k'}| \text{ und } |\beta_{i'}, \beta_{k'}|,$$

und zwar sei vorerst $i' = i$.

Wenn dann die beiden Grenzpolygone in α_i und β_i resp. die aufeinander folgenden Ecken besitzen:

$$(\alpha_l, \alpha_i, \alpha_k), (\alpha_k, \alpha_i, \alpha_{k_1}), (\alpha_{k_1}, \alpha_i, \alpha_{k_2}), \ldots, (\alpha_{k_p}, \alpha_i, \alpha_{k'}), \ldots$$

$$(\beta_l, \beta_i, \beta_k), (\beta_k, \beta_i, \beta_{k_1}), (\beta_{k_1}, \beta_i, \beta_{k_2}), \ldots, (\beta_{k_p}, \beta_i, \beta_{k'}), \ldots,$$

so zeigt die Anschauung, dass, je nachdem den Kanten (α_i, α_k) und (β_i, β_k) gleicher oder entgegengesetzter Drehungssinn zukommt, successive auch die Kantenpaare

$$|\alpha_i, \alpha_{k_1}| \text{ und } |\beta_i, \beta_{k_1}|, \quad |\alpha_i, \alpha_{k_2}| \text{ und } |\beta_i, \beta_{k_2}|, \ldots,$$
$$|\alpha_i, \alpha_{k'}| \text{ und } |\beta_i, \beta_{k'}|$$

in dem ihrigen übereinstimmen oder nicht.

Falls nun i' ungleich i ist, so schneide man die beiden Kanten (α_i, α_k) und $(\alpha_{i'}, \alpha_{k'})$ mittelst einer beliebigen Ebene. Dieselbe durchschneidet ein Flächensystem:

$$\alpha_i, \alpha_k, \alpha_{k_1}, \ldots \alpha_{k_q}, \alpha_x, \alpha_y, \ldots \alpha_i,$$
$$(x, y = i', k'),$$

in welchem je zwei benachbarte Flächen eine Kante gemein haben. Gemäfs dem Isomorphismus der beiden Polyeder mufs das Flächensystem

$$\beta_i, \beta_k, \beta_{k_1}, \ldots, \beta_{k_q}, \beta_x, \beta_y, \ldots, \beta_i$$

die nämliche Eigenschaft besitzen.

Dann aber genügt die q-malige Wiederholung des vorigen Schlusses, um die ursprüngliche Behauptung zu verificieren.

Zufolge der Unterscheidung zwischen gleich und ungleich gerichtetem Isomorphismus zerfällt zwar die Gesamtheit der isomorphen convexen Polyeder eines bestimmten Typus in zwei im allgemeinen sich ausschliefsende Complexe. Dieselben stehen aber in der einfachen constructiven Beziehung, dafs in Bezug auf jede beliebige Ebene des Raumes die Körper des einen als die Spiegelbilder der Körper des andern angesehen werden können. Daher reicht auch ein einziger Körper hin, um die jeweilige Gattung vollständig zu repräsentieren.

§ 2. Relationen zwischen den morphologischen Charakteristiken eines convexen Polyeders.

Es ist bereits hervorgehoben worden, dafs durch den Isomorphismus zweier convexen Polyeder für diese die Constanz gewisser entsprechender Anzahlen bedingt ist. Dieselben fixieren den morphologischen Charakter der Gattung und können füglich als deren morphologische Invarianten bezeichnet werden. Eine nähere Betrachtung zeigt alsbald, dafs sie nicht unabhängig von einander sind, dafs vielmehr zwischen ihnen zahlreiche Beziehungen stattfinden.

Die drei ersten dieser Invarianten, die Anzahlen n, k und r der Flächen, Kanten und Ecken, genügen bekanntlich der Euler'schen Relation:

1) $$n - k + r = 2.$$

Werden ferner die Anzahlen x_h und y_h der h-seitigen Flächen und h-kantigen Ecken eingeführt:

$$h = 3,\ 4,\ \ldots,\ n-1,$$

so treten folgende leicht zu erweisende vier Gleichungen hinzu:

2a) $$x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} = n;$$

2b) $$3x_3 + 4x_4 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 2k.$$

3a) $$y_3 + y_4 + \cdots + y_{n-1} = r;$$

3b) $$3y_3 + 4y_4 + \cdots + (n-1)y_{n-1} = 2k.$$

Die Gleichungen 2b) und 3b) lassen sich schreiben:

2b) $$3(x_3 + x_5 + \cdots) + 2(2x_4 + x_5 + 3x_6 + 2x_7 + \cdots) = 2k,$$

3b) $$3(y_3 + y_5 + \cdots) + 2(2y_4 + y_5 + 3y_6 + 2y_7 + \cdots) = 2k.$$

Demnach ist jede der beiden Summen

$$x_3 + x_5 + \cdots \quad \text{und} \quad y_3 + y_5 + \cdots$$

ohne Rest durch 2 teilbar; also:

In jedem convexen Polyeder ist die Anzahl der unpaaren) Grenz$\genfrac{}{}{0pt}{}{\textit{flächen}}{\textit{ecken}}$ eine gerade Zahl.*

Speciell folgt hieraus:

Ein Polyeder mit einer *ungeraden* Anzahl von Grenz$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{flächen}}{\text{ecken}}$ besitzt *mindestens eine paare* Grenz$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{fläche}}{\text{ecke}}$.

Multipliciert man die Gleichungen 2a) und 3a) mit 6 und subtrahiert alsdann von denselben resp. die Gleichungen 2b) und 3b), so resultiert:

$$\text{2c)} \quad 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots = 6n - 2k,$$

$$\text{3c)} \quad 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_7 - 2y_8 - 3y_9 - \cdots = 6r - 2k,$$

oder, da die x und y nur positive ganze Zahlen einschliefslich 0 bedeuten:

$$\text{4a)} \qquad 3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqq 6n - 2k,$$

$$\text{4b)} \qquad 3y_3 + 2y_4 + y_5 \geqq 6r - 2k.$$

Es bestehen daher schliefslich die beiden Ungleichungen:

$$\text{5a)} \qquad x_3 + x_4 + x_5 \geqq \left[\frac{6n - 2k}{3}\right],$$

$$\text{5b)} \qquad y_3 + y_4 + y_5 \geqq \left[\frac{6r - 2k}{3}\right].$$

Nun berechnen sich für ein convexes n-flach mit durchgängig dreikantigen Ecken die Anzahlen r und k gemäfs den beiden Formeln

$$n - k + r = 2 \quad \text{und} \quad 2k = 3r$$

als lineare Functionen von n, nämlich:

$$r = 2n - 4, \quad k = 3n - 6.$$

Dadurch, dafs bei stetiger Variation der n Grenzebenen die $2n - 4$ dreikantigen Ecken gruppenweise coincidieren, geht

---

*) Ich bezeichne eine Grenz$\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{fläche}}{\text{ecke}}$ als paar oder unpaar, je nachdem sie durch eine paare oder unpaare Anzahl von Kanten bestimmt ist.

eine gewisse Zahl der Kanten verloren, und zwar absorbiert das Auftreten einer p-kantigen Ecke genau sowohl $p-3$ Ecken als $p-3$ Kanten. Setzt man daher

$$r + \varrho = 2n - 4,$$

so ergiebt sich

$$6n - 2k = 12 + 2\varrho.$$

Also ist allemal

4a) $$3x_3 + 2x_4 + x_5 \gtreqless 12 + 2\varrho \quad \text{und}$$

5a) $$x_3 + x_4 + x_5 \gtreqless 4 + \left[\frac{2\varrho}{3}\right].$$

Ganz analog führt der reciproke Entstehungsprocess des Polyeders zu den Ungleichungen:

4b) $$3y_3 + 2y_4 + 5y_5 \gtreqless 12 + 2\nu \quad \text{und}$$

5b) $$y_3 + y_4 + y_5 \gtreqless 4 + \left[\frac{2\nu}{3}\right].$$

Unter den n Grenzflächen bezw. den r Grenzecken eines beliebigen convexen Polyeders existieren somit stets mindestens $4 + \left[\frac{2\varrho}{3}\right]$ *resp.* $4 + \left[\frac{2\nu}{3}\right]$, *welche durch weniger als sechs Kanten bestimmt sind.*

Auch für die Summe $x_3 + y_3$ läfst sich eine untere Grenze angeben. Unter Benutzung der Gleichungen 2a) und 3a) nehmen 2b) und 3b) die Form an:

2b) $$2k + x_3 = 4n + x_5 + 2x_6 + \cdots,$$

3b) $$2k + y_3 = 4r + y_5 + 2y_6 + \cdots.$$

Addirt man die Gleichungen und wendet die Relation 1) an, so erhält man:

6) $$x_3 + y_3 = 8 + (x_5 + y_5) + 2(x_6 + y_6) + \cdots$$

In jedem convexen Polyeder hat die Gesamtzahl der dreiseitigen Flächen und dreikantigen Ecken die Zahl 8 zum Minimum.

Den fünf „Stammgleichungen“ 1), 2) und 3) subordiniert sind weitere Gleichungssysteme, die sich auf die Art der Zusammensetzung eines jenen genügenden Flächen- und Eckensystems zu der Gesamtoberfläche des Polyeders beziehen.

Bezeichnet einerseits $x_{p,q}^{(h)}$ die Anzahl der p-seitigen Grenz-

flächen, welche durch hq-kantige Ecken gehen, andrerseits $y_{q,p}^{(h)}$ die Anzahl der q-kantigen Ecken, welche in hp-seitigen Grenzflächen liegen, so muss sein:

7) $$\sum_{h=1}^{p} h x_{p,q}^{(h)} = \sum_{h=1}^{q} h y_{q,p}^{(h)},$$
$$p, q = 3, 4, 5, \ldots, n-1;$$

7a) $$\sum_{q=3}^{n-1} \sum_{h=1}^{q} h x_{p,q}^{(h)} = p x_p,$$
$$p = 3, 4, \cdots, n-1;$$

7b) $$\sum_{p=3}^{n-1} \sum_{h=1}^{p} h y_{q,p}^{(h)} = q y_q,$$
$$q = 3, 4, \cdots, n-1.$$

Es mag genügen, hier auf die Existenz solcher und ähnlicher Gleichungen hingewiesen zu haben. Für die weiteren Betrachtungen sind dieselben ohne Bedeutung.

§ 3. Fundamentalconstructionen.

Der naturgemäfse Entstehungsprocefs eines convexen n-flachs A_n besteht darin, dafs von einem aus $n-1$ seiner Ebenen gebildeten $n-1$-flach A_{n-1} mittels einer n^{ten} Ebene α_n ein $(m+1)$-flach A'_{m+1} abgeschnitten wird, wenn m die Anzahl der Seiten der in α_n gelegenen Grenzfläche von A_n bezeichnet. Ganz analog wird das $(n-1)$-flach A_{n-1} mittelst einer $(n-1)^{\text{ten}}$ Ebene α_{n-1} aus einem $(n-2)$-flach A_{n-2}, dieses mittelst einer $(n-2)^{\text{ten}}$ Ebene α_{n-2} aus einem $(n-3)$-flach A_{n-3}, u. s. f., schliefslich das 5-flach A_5 mittelst einer fünften Ebene α_5 aus einem 4-flach A_4 abgeleitet.

In diesem Constructionsverfahren motivieren die Ausführungen des vorigen Paragraphen eine wesentliche Vereinfachung. Da nämlich laut Formel 4a) jedes Polyeder A_h mindestens vier Grenzflächen besitzt, die sämtlich höchstens fünf Seiten besitzen, so kann allemal die Ebene α_h mit der Ebene einer dieser Flächen identificiert werden. Hierdurch tritt aber der folgende fundamentale Satz in Evidenz:

Theorem 1. *Jedes convexe Polyeder kann aus einem durch vier seiner Grenzebenen bestimmten Tetraeder lediglich mittelst drei-, vier- und fünfseitiger ebener Schnitte construiert werden.*

Um von einer derartigen Construction, einer sogenannten Fundamentalconstruction, eine klare Vorstellung zu gewinnen, scheint es zweckmäfsig, einige Operationssymbole einzuführen: Je nachdem die Ebene α_n eine drei-, vier- oder fünfseitige Grenzfläche des n-flachs A_n enthält, schneidet sie von dem $(n-1)$-flach A_{n-1} eine dreikantige Ecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$, eine Kante $|\alpha_k, \alpha_l|$ oder zwei in einer Ecke sich treffende Kanten $|\alpha_l, \alpha_k|$ und $|\alpha_i, \alpha_l|$ ab. Ich wähle für diese drei Operationen resp. die Schreibweisen:

$$\alpha_n \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l), \quad \alpha_n \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_k, \alpha_l|, \quad \alpha_n \stackrel{\wedge}{-} [|\alpha_i, \alpha_k|, |\alpha_i, \alpha_l|].$$

Geht im besonderen die Ebene α_n durch eine oder mehrere Ecken $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \ldots$ von A_{n-1}, so soll zum Ausdruck hierfür gegeben werden:

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \cdots) \, \alpha_n \stackrel{\bullet}{-}, \stackrel{\blacksquare}{-}, \stackrel{\wedge}{-}.$$

Unter Anwendung dieser Bezeichnungsweisen ergiebt sich beispielsweise als Schema einer speciellen F.-Construction eines Pentagon-Dodekaeders, wenn man $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ zu den Ebenen des F.-Tetraeders A_4 wählt:

$$\alpha_5 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad \alpha_6 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_5), \quad \alpha_7 \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_4, \alpha_5|,$$
$$\alpha_8 \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_2, \alpha_4|, \quad \alpha_9 \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_3, \alpha_4|, \quad \alpha_{10} \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_2, \alpha_6|, \quad \alpha_{11} \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_3, \alpha_7|,$$
$$\alpha_{12} \stackrel{\wedge}{-} [|\alpha_5, \alpha_2|, |\alpha_5, \alpha_3|].$$

Dafs und wie im allgemeinen aus einer gegebenen F.-Construction die Kanten und Ecken einer beliebigen Grenzfläche des resultierenden Polyeders zu bestimmen sind, zeigt folgende Überlegung: Gesetzt, es sei die Aufgabe in Bezug auf die Grenzflächen des von den vier F.-Ebenen und den ersten m Schnitten gebildeten $(4+m)$-flachs bereits gelöst, so ordne man die Seitenflächen einer Grenzfläche α_i*) desselben zu einer Folge:

$$\alpha_{i_1}, \ \alpha_{i_2}, \ \ldots \ \alpha_{i_h},$$

*) Es wird hier eine Grenzfläche kurz durch ihre Ebene bezeichnet.

in welcher je zwei benachbarte Flächen mit α_i eine Grenzecke bestimmen. Dann mufs der erste unter den übrigen $n - m - 4$ Schnitten

$$\alpha_{m+5}, \alpha_{m+6}, \ldots, \alpha_n,$$

welcher die Grenzverhältnisse in α_i verändert, durch ein Operationssymbol definiert sein, das seinem Typus nach zwischen nachstehenden vier Formen wechseln kann:

1) $\alpha' \doteq (\alpha_{i_g}, \alpha_i, \alpha_{i_{g+1}})$, 2) $\alpha' \overset{=}{-} |\alpha_{i_g}, \alpha_i|$,

3) $\alpha' \triangleq [|\alpha_{i_g}, \alpha_i|, |\alpha_{i_{g+1}}, \alpha_i|]$, 4) $\alpha' \overset{=}{-} |\alpha_{i_g}, \alpha_{i_{g+1}}|$.

Entsprechend diesen vier Möglichkeiten ordnen sich die Seitenflächen von α_i resp. zu den vier Reihen

1) $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_g}, \alpha', \alpha_{i_{g+1}}, \ldots, \alpha_{i_h}$,

2) $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{g-1}}, \alpha', \alpha_{i_{g+1}}, \ldots, \alpha_{i_h}$,

3) $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{g-1}}, \alpha', \alpha_{i_{g+2}}, \ldots, \alpha_{i_h}$,

4) $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_g}, \alpha', \alpha_{i_{g+1}}, \ldots, \alpha_{i_h}$.

Auf ganz analoge Weise ist nun die nächstfolgende Seitenfläche von α_i zu ermitteln und unter die schon vorhandenen einzureihen u. s. f.

In dem obigen Beispiele des Pentagon-Dodekaeders findet man so als Seitenflächen der zwölf Grenzflächen

$\alpha_1 |$*)$: \alpha_2, \alpha_3, \alpha_9, \alpha_4, \alpha_8$; $\alpha_2 | : \alpha_1, \alpha_3, \alpha_{12}, \alpha_{10}, \alpha_8$;

$\alpha_3 | : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}, \alpha_{11}, \alpha_4$; $\alpha_4 | : \alpha_1, \alpha_8, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_9$;

$\alpha_5 | : \alpha_6, \alpha_{10}, \alpha_{12}, \alpha_{11}, \alpha_7$; $\alpha_6 | : \alpha_4, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_5, \alpha_7$;

$\alpha_7 | : \alpha_4, \alpha_9, \alpha_{11}, \alpha_5, \alpha_6$; $\alpha_8 | : \alpha_1, \alpha_2, \alpha_{10}, \alpha_6, \alpha_4$;

$\alpha_9 | : \alpha_1, \alpha_3, \alpha_{11}, \alpha_7, \alpha_4$; $\alpha_{10} | : \alpha_2, \alpha_8, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_{12}$;

$\alpha_{11} | : \alpha_3, \alpha_9, \alpha_7, \alpha_5, \alpha_{12}$; $\alpha_{12} | : \alpha_2, \alpha_3, \alpha_{11}, \alpha_5, \alpha_{10}$.

Aus den bisherigen Erörterungen erhellt, dafs jede F.-Construction zu einem gestaltlich unzweideutig bestimmten convexen Polyeder führt, d. h. dafs *übereinstimmende* F.-Construc-

---

*) Durch das Symbol $\alpha_i | \alpha_k$ soll ausgedrückt werden, dafs die beiden Grenzflächen α_i und α_k eine Grenzkante $|\alpha_i, \alpha_k|$ gemein haben.

tionen *stets isomorphe* Körper ergeben. Dagegen zeigt schon die Constructionsanalyse eines Tetragon-Hexaeders, dafs auch verschiedenen F.-Constructionen isomorphe Resultate entsprechen. Denn stellen wieder α_1, α_2, α_3, α_4 die vier F.-Ebenen dar, so bestimmt jede der beiden Constructionen

1) $\alpha_5 \overset{\bullet}{-} (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad \alpha_6 \overset{\blacksquare}{-} |\alpha_3, \alpha_4|$ und

2) $\alpha_5 \overset{\blacksquare}{-} |\alpha_1, \alpha_2|, \quad \alpha_6 \overset{\blacksquare}{-} |\alpha_3, \alpha_4|$

ein Tetragon-Hexaeder. Diese Mehrdeutigkeit in der Reduction eines convexen Polyeders auf eine F.-Construction bildet das wesentlichste Hindernis für die Ausführung des an sich naheliegenden Gedankens, von den F.-Constructionen aus die Systematisierung*) der verschiedenen Polyedertypen zu versuchen.

§ 4. **Allgemeine und singuläre convexe Polyeder.**

Die vergleichende Betrachtung der convexen Polyeder in Bezug auf ihren Allomorphismus bedingt in erster Linie eine Zweiteilung derselben in allgemeine und singuläre. Allgemein in morphologischem Sinne ist ein convexes Polyeder, wenn in *jeder* Ecke *genau drei*, singulär, wenn *auch nur* in *einer* Ecke *mehr als drei* seiner Grenzflächen zusammenstofsen. Während also die Grenzebenen eines allgemeinen Polyeders an die einzige Bedingung gebunden sind, auch wirklich ein und denselben ganz bestimmten Raum einzuschliefsen, finden zwischen denjenigen eines singulären noch lineare Abhängigkeiten statt.

Jedes singuläre convexe Polyeder stellt einen gemeinsamen Grenzfall mehrerer allomorphen allgemeinen Polyeder dar. Um eines der letzteren zu erhalten, wähle man, wenn

---

*) Die Figuren der Tafel (1) veranschaulichen die verschiedenen Typen der von weniger als acht Ebenen begrenzten allgemeinen Polyeder. Das Constructionsprincip derselben, sowie derjenigen der anderen Tafeln besteht darin, dafs innerhalb des über einer Grenzfläche $\langle\alpha_1\rangle$ von A_n durch die Grenzebenen bestimmten Seitenkörpers ein Punkt angenommen, und aus demselben die Oberfläche des Polyeders, d. h. dessen Ecken und Kanten auf $\langle\alpha_1\rangle$ projiciert wird. Man überzeugt sich leicht, dafs A_n stetig und sich selbst isomorph in seinen so erhaltenen Schein übergeführt werden kann und zwar lediglich durch Drehung der Ebenen α ($i = 2, 3, \ldots n$) um die festen Geraden $|\alpha_i, \alpha_1|$.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Grenzebenen des gegebenen singulären Polyeders A_n sind, in denselben n Geraden $g_1, \ldots, g_n$, so daſs keine von ihnen irgend eine Verbindungsgerade zweier Ecken von A_n schneidet. Dreht man alsdann zuerst α_1 um g_1 in eine solche Lage α_1', daſs weder in dem dabei durchstrichenen Raume noch auch in α_1' eine Ecke von A_n enthalten ist, dreht darauf unter Zugrundelegung des von den n Ebenen $\alpha_1', \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ gebildeten n-eders A_n' α_2 entsprechend um g_2 in eine Lage α_2' u. s. f., so ist das Endresultat ein allgemeines n-eder $A_n^{(n)}$, welches mit A_n insofern isomorph ist, als einer Kante $|\alpha_i, \alpha_k|$ von A_n auch wieder einer Kante $|\alpha_i', \alpha_k'|$ von $A_n^{(n)}$ entspricht. Die Art der hierbei erfolgenden Auflösung einer „singulären" Ecke von A_n in ein System mehrerer getrennten Ecken von $A_n^{(n)}$ ist abhängig einerseits von den Lagen derjenigen Geraden g, welche in den die Ecke enthaltenden Ebenen α liegen (als Charakteristikum einer bestimmten Lage die Art der Verteilung der besagter Ebene angehörigen Ecken auf die beiden durch die Gerade getrennten Halbebenen aufgefaſst), andrerseits von dem Sinne einer jeden der mit diesen Ebenen ausgeführten Drehungen. Tritt in dem einen oder in dem anderen oder in beiden Punkten eine Änderung ein, so auch in dem morphologischen Charakter von $A_n^{(n)}$.

Die singulären convexen Polyeder können wiederum je nach dem Grade ihrer Singularität in Klassen geordnet werden. Als besagten Grad definiere ich für ein singuläres n-flach A_n die Gröſse

$$y_4 + 2y_5 + \cdots + (n-4)y_{n-1} = 2k - 3r,$$

eine Zahl, der successive die Werte 1, 2, 3 u. s. w. beizulegen sind, und durch welche die Anzahl der zwischen den Grenzflächen unabhängig von einander bestehenden linearen Dependenzen angegeben wird.

Eine erschöpfende Morphologie der convexen Polyeder hätte zuerst die Klasse der allgemeinen, dann in aufsteigender Reihenfolge die verschiedenen Klassen der singulären zu behandeln. Ich werde mich in den weiteren Untersuchungen ausschlieſslich auf die allgemeinen convexen Polyeder beziehen.

§ 5. Die Kreuzungskanten eines allgemeinen convexen Polyeders.

Ist ein allgemeines convexes Polyeder gegeben:

$$A_n \equiv \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n,$$

so nenne ich eine Kante $|\alpha_k, \alpha_l|$ eine *Kreuzungskante* desselben, wenn die Eckpunkte der Kante durch zwei Grenzflächen α_i, α_m bestimmt werden, welche sich aufserhalb A_n schneiden.

Durch eine beliebige Grenzecke $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *gehen im allgemeinen mindestens zwei Kreuzungskanten.* Denn sind $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ die zweiten Eckpunkte der Kanten $|\alpha_1, \alpha_2|$, $|\alpha_2, \alpha_3|$, $|\alpha_3, \alpha_1|$ und sind $\alpha_6, \alpha_4, \alpha_5$ die durch dieselben gehenden Grenzebenen, so zeigt die Anschauung, dafs falls die Gerade (α_1, α_4) Kante von A_n ist, die Geraden $|\alpha_2, \alpha_5|$ und $|\alpha_3, \alpha_6|$ ganz in den Aufsenraum von A_n fallen. Eine Ausnahme von dieser Regel tritt in dem Falle ein, wo $\mathfrak{a}$ Ecke eines Grenzdreiseits ist. Vertritt nämlich α_1 die Ebene des letzteren, so sind α_5 und α_6 identisch, und $|\alpha_2, \alpha_3|$ ist die einzige durch $\mathfrak{a}$ gehende Kreuzungskante.

Die Bedeutung der Kreuzungskanten erklärt sich aus folgendem Satze:

Werden die Grenzebenen eines gegebenen allgemeinen convexen Polyeders A_n stetig im Raume variiert, so wird eine morphologische Änderung desselben stets dann und nur dann eintreten, wenn nach erfolgter Coincidenz der Eckpunkte $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ und $(\alpha_m, \alpha_k, \alpha_l)$ einer Kreuzungskante $|\alpha_k, \alpha_l|$ diese aus der Reihe der Kanten von A_n ausscheidet, während zugleich die vorherige Aufsengerade $|\alpha_i, \alpha_m|$ in die Reihe der Kanten neu eintritt. Dabei können die Variationen der Ebenen α stets so gewählt werden, dafs jede beliebige Kreuzungskante ausgeschieden wird.

Was den ersten Teil dieses Satzes anlangt, so wird dessen Richtigkeit unmittelbar durch die Anschauung bestätigt. Um die Natur der jedesmal eintretenden morphologischen Änderungen von A_n ganz zu übersehen, seien die Seitenanzahlen der in den Ebenen α_i, α_k, α_l, α_m liegenden Grenzflächen *vor*

deren Kreuzung durch μ_i, μ_k, μ_l, μ_m, nach der Kreuzung durch μ_i', μ_k', μ_l', μ_m' bezeichnet.

Zufolge des Rollenwechsels der Geraden $|\alpha_k, \alpha_l|$ und $|\alpha_i, \alpha_m|$ bestehen zwischen diesen $2 \cdot 4$ Zahlen die Beziehungen:

$$\mu_k - 1 = \mu_k', \quad \mu_l - 1 = \mu_l';$$
$$\mu_i + 1 = \mu_i', \quad \mu_m + 1 = \mu_m'.$$

Den zweiten Teil des Satzes betreffend wähle ich $A_4 \equiv \alpha_1$, α_2, α_3, α_4 zu einem Kreuzungsvierflach mit $|\alpha_2, \alpha_3|$ zur Kreuzungskante, so erledigt sich zunächst der Fall, wo wenigstens eine der beiden Ebenen α_1, α_4 ein Grenzdreiseit enthält. Alsdann genügt nämlich eine einfache Drehung der betreffenden Ebene α_ξ um die der Ecke $(\alpha_\xi, \alpha_2, \alpha_3)$ gegenüberliegende Seite des Dreiseits, die gewünschte Kreuzung von $|\alpha_2, \alpha_3|$ und $|\alpha_1, \alpha_4|$ herbeizuführen.

Aus der weiteren Bemerkung, dafs A_n als Tetragon-Hexaeder bestimmt ist, falls die vier Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 je ein Grenzvierseit enthalten, und dafs dann eine einfache Drehung der Ebene α_1 um die Verbindungsgerade der als fest angenommenen Ecken $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_6)$ und $(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5)$ gleichfalls zu der gewünschten Kreuzung führt, folgt, dafs von den Grenzflächen der vier Ebenen höchstens drei als Vierseite, die vierte mindestens als Fünfseit vorausgesetzt werden kann.

1) Es mögen α_1, α_2, α_3 je ein Grenzvierseit, α_4 ein Grenzfünfseit enthalten. Bezeichnen α_5 und α_6 diejenigen zwei Ebenen, welche resp. die auf den Kanten $|\alpha_1, \alpha_2|$ und $|\alpha_1, \alpha_3|$ ausser $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ noch liegenden zwei Ecken von A_n bestimmen, so zeigen die gemachten Annahmen, dafs ihre beiden Grenzflächen mindestens je fünfseitig sind. Wenn nun die Anzahlen der in den sechs Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ vorhandenen drei-, vier- und fünfseitigen Grenzflächen resp. durch x_3', x_4', x_5', die entsprechenden Anzahlen für die übrigen $n - 6$ Ebenen $\alpha_7, \ldots, \alpha_n$ durch resp. x_3'', x_4'', x_5' bezeichnet werden, so ergiebt sich unter Benutzung der im § 2 erwiesenen Ungleichung

$$3(x_3' + x_3'') + 2(x_4' + x_4'') + (x_5' + x_5'') \overline{\gtrless} 12,$$

die andere

$$3x_3'' + 2x_4'' + x_5'' \overline{\gtrless} 3.$$

2) Es mögen in den vier Ebenen α_1, α_2, α_3, α_4 höchstens zwei Grenzvierseite und höchstens zwei Grenzfünfseite liegen. — Da $|\alpha_1, \alpha_4|$ Aufsengerade von A_n ist, so existieren unter den übrigen $n - 4$ Grenzebenen notwendig zwei, etwa α_5 und α_6, deren Schnittgerade Kante von A_n ist, und die mit den ersten vier Ebenen ein Sechsflach bestimmen, in Bezug auf welches $|\alpha_1, \alpha_4|$ gleichfalls Aufsengerade ist. Die Grenzpolygone in α_5 und α_6 können nicht beide Dreiseite sein, da sonst A_n als ein Tetraeder bestimmt wäre. Also mufs das eine mindestens ein Dreiseit, das andere mindestens ein Vierseit sein. Werden jetzt wieder die sechs Ebenen $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ den $n - 6$ Ebenen $\alpha_7, \ldots, \alpha_n$ gegenübergestellt, und mit Bezug auf erstere die Anzahlen x_3', x_4', x_5', mit Bezug auf letztere die Anzahlen x_3'', x_4'', x_5'' eingeführt, so gelten den gemachten Annahmen zufolge die Beziehungen:

$$3x_3' + 2x_4' + x_5' \leqq 11$$
$$3x_3'' + 2x_4'' + x_5'' \geqq 1.$$

Durch die den beiden Annahmen 1) und 2) entsprechenden zwei Ungleichungen

1) $$3x_3'' + 2x_4'' + x_5'' \geqq 3$$
2) $$3x_3'' + 2x_4'' + x_5'' \geqq 1$$

wird folgendes bewiesen:

Ist A_4 ein Kreuzungsvierflach von A_n, dessen Seitenflächen kein Grenzdreiseit enthalten, so lassen sich stets zwei weitere Grenzebenen α_5 und α_6 bestimmen, deren Schnittlinie eine Kante von A_n ist und die mit A_4 zusammen ein Tetragon-Hexaeder constituieren, in Bezug auf welches A_4 gleichfalls Kreuzungsvierflach ist. Dann giebt es unter den übrigen $n - 6$ in den Ebenen $\alpha_7, \ldots, \alpha_n$ gelegenen Grenzflächen von A_n mindestens eine, etwa die in α_n, welche von höchstens fünf Seiten begrenzt ist.

Scheidet nun α_n aus der Begrenzung von A_n aus, so bleibt A_4' als Kreuzungsvierflach von A_6 auch Kreuzungsvierflach für das resultierende $(n - 1)$-flach A_{n-1}. Es wird daher A_4 entweder in einer der beiden Ebenen α_1, α_4 ein Grenzdreiseit des Polyeders A_{n-1} enthalten, oder mit Be-

zug auf letzteres die unter 1) und 2) gemachten Annahmen erfüllen. — Im zweiten Falle giebt es unter den $n - 7$ Grenzebenen $\alpha_7, \ldots, \alpha_{n-1}$ wiederum mindestens eine, etwa α_{n-1}, welche das $(n-1)$-flach A_{n-1} in einem Polygon mit weniger als sechs Seiten begrenzt. Scheidet diese Ebene aus der Begrenzung von A_{n-1} aus, so bleibt A_4 Kreuzungsvierflach von A_6 und folglich auch von dem resultierenden $(n-2)$-flach A_{n-2}, und wieder wird entweder eine der beiden Ebenen α_1, α_4 ein Grenzdreiseit von A_{n-2} oder mindestens eine der $n - 8$ Ebenen $\alpha_7, \ldots, \alpha_{n-2}$, etwa α_{n-2}, ein von weniger als sechs Seiten begrenztes Grenzpolygon enthalten. — Im zweiten Falle ist die eingeschlagene Analyse fortzusetzen und in derselben so lange fortzufahren, bis man entweder auf ein m-flach A_m stöfst,

$$(m \gtreqless 7),$$

welches in α_1, resp. in α_4 ein Grenzdreiseit besitzt oder bis man zu dem Hexaeder A_6 gelangt.

Berücksichtigt man aber, dafs in dem einen wie in dem anderen Falle eine einfache Drehung von α_1 oder von α_4 um eine feste Gerade ausreicht, um die Coincidenz der beiden Ecken $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $(\alpha_4, \alpha_2, \alpha_3)$ in der verlangten Weise herbeizuführen; erwägt man ferner, dafs sowohl eine Ebene α_{m+h} als eine Ebene α_{6+h} in ihrer Lage zu den Ebenen mit kleineren Indices durch eine F.-Operation bestimmt wird, welche von den genannten zwei Ecken durchaus unabhängig und also durch deren gegenseitige Lage in ihrer Ausführbarkeit nicht im geringsten gestört wird, so erhellt, wie die n Grenzebenen von A_n stets so stetig variiert werden können, dafs genau die gewünschte Kreuzung der Geraden $|\alpha_2, \alpha_3|$ und $|\alpha_1, \alpha_4|$ und nur diese eintritt. Q. e. d.

Aus der Thatsache, dafs eine Änderung in dem morphologischen Charakter eines allgemeinen Polyeders immer und nur zugleich mit einem Wechsel in dem Systeme der Kreuzungskanten erfolgt, kann geschlossen werden, dafs der morphologische Charakter durch das System der Kreuzungskanten vollkommen und unzweideutig bestimmt ist; mit andern Worten, *dafs zwischen zwei allgemeinen Polyedern Isomorphismus statthat, wenn sie in den Systemen der Kreuzungskanten überein-*

stimmen. Dieser Schlufs ist auch direct leicht zu bestätigen. Denn sind A_{n_1} und B_{n_2} die beiden Polyeder, und ist $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ irgend eine Ecke des ersten, so giebt es bekanntlich unter den drei Kanten $|\alpha_i, \alpha_k|$, $|\alpha_k, \alpha_l|$ und $|\alpha_l, \alpha_i|$ mindestens eine Kreuzungskante, etwa $|\alpha_i, \alpha_k|$. Dann aber ist nach Voraussetzung die Gerade $|\beta_i, \beta_k|$ Kreuzungskante von B_{n_2} und β_l eine durch einen Endpunkt dieser Kante gehende Grenzebene. Also entspricht einer Grenzecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ von A_{n_1} wieder eine Grenzecke $(\beta_i, \beta_k, \beta_l)$ von B_{n_2}, d. h. die beiden Polyeder sind isomorph.

Hält man ein beliebiges n-eder A_n vom Typus A fest und definiert die kleinste Anzahl m von Kreuzungen, vermöge deren A_n in ein n-eder B_n vom Typus B übergehen kann, als das Mafs der morphologischen Differenz oder Distanz von A und B, so ordnen sich die einzelnen Gattungen des allgemeinen convexen n-eders entsprechend der Gröfse ihrer Abstände von der Gattung A in Gruppen. Es besteht im Princip keinerlei Schwierigkeit, successive die dem Typus A „benachbarten“ Typen der ersten Gruppe, aus diesen diejenigen der zweiten u. s. f., schliefslich aus allen vorhergehenden die Typen der letzten Gruppe abzuleiten und so ein natürliches System der allgemeinen convexen n-eder aufzustellen. Dabei scheint es im Interesse der Übersicht geboten, zum Kern des Systemes ein n-eder mit möglichst vielen, nämlich mit $3n - 6$ Kreuzungskanten zu wählen. Das allgemeine Bildungsgesetz eines solchen Körpers ergiebt sich aus der Beobachtung, dafs derselbe ein Grenzdreiseit nicht enthalten kann, dafs er ferner durch die Einführung, wie durch die Ausscheidung eines Grenzvierseits in einen analogen Körper übergeht, und dafs endlich die Einführung und Ausscheidung eines Grenzfünfseits den gleichen Erfolg hat, aufser in dem Falle, wo die genannte Operation die Entstehung eines Grenzdreiseits nach sich zieht. Wendet man daher die als zulässig erwiesenen Operationen in allen möglichen Combinationen nach einander auf das Tetragon-Hexaeder und jeden neu resultierenden Körper an, so wird man alle verlangten n-eder erhalten. Unter denselben erscheint wiederum ein Körper von dem Typus eines $n - 2$-kantigen Prismas der Construction nach am einfachsten. Ist nämlich

die Gerade $|\alpha_5, \alpha_6|$ eine Kante eines Tetragonhexaeders A_6, so führen die Operationen

$$\alpha_7 \mathrel{\bar{\bar{-}}} |\alpha_5, \alpha_6|, \quad \alpha_8 \mathrel{\bar{\bar{-}}} |\alpha_6, \alpha_7|, \ldots, \alpha_n \mathrel{\bar{\bar{-}}} |\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}|$$

zu dem gewünschten Polyeder.

Eine ähnliche, wenn auch nicht gleich ausgezeichnete Stellung, wie die n-eder mit der Maximalzahl, nehmen diejenigen mit der Minimalzahl von Kreuzungskanten ein. Ein solches ist durch die Bedingung bestimmt, dafs unter seinen Grenzflächen möglichst viele Dreiseite vorkommen. Da nun eine Grenzecke nicht mehr als einem einzigen Dreiseit angehören kann, weil sonst zwei Dreiseite eine Kante gemein hätten, und mithin das Polyeder ein Vierflach sein müfste, so folgt, dafs höchstens $\left[\frac{2n-4}{3}\right]$ Grenzdreiseite vorhanden sein können. Um einen Körper mit dieser Anzahl von Grenzdreiseiten zu construieren, hat man aus $n - \left[\frac{2n-4}{3}\right]$ Ebenen irgend ein Polyeder zu bilden und von demselben $\left[\frac{2n-4}{3}\right]$ Ecken mittelst ebenso vieler weiteren Ebenen abzuschneiden. Die Anzahl der Kreuzungskanten des resultierenden n-flachs stellt sich im allgemeinen auf

$$3 \cdot \left(n - \left[\frac{2n-4}{3}\right]\right) - 6,$$

eine Zahl, welche, falls n von der Form $6\nu + 6$ ist, sich um eine Einheit vermindern kann.

§ 6. Die Continuität einer Polyedergattung.

Die bisherigen Betrachtungen finden, soweit sie sich auf das allgemeine convexe Polyeder beziehen, eine wesentliche Ergänzung und zugleich einen gewissen Abschlufs in dem Satze:

Theorem 2. *Zwei isomorphe allgemeine convexe Polyeder A_n und B_n lassen sich allemal stetig und unter Erhaltung ihres morphologischen Charakters in einander überführen.*

Um den Satz vorerst für den einfachsten Fall $n = 4$ zu verificieren, bringe man entsprechende Ebenen zum gegenseitigen Durchschnitt. Das Ebenenpaar α_1, β_1 teilt den Raum

in zwei Paare von Scheitelräumen, von denen das eine durch $(\alpha_1, \beta_1)_1$, das andere durch $(\alpha_1, \beta_1)_2$ bezeichnet werde. Liegt der Punkt $(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ aufserhalb des Raumes $(\alpha_1, \beta_1)_1$, so drehe man α_1 um $|\alpha_1, \beta_1|$ innerhalb desselben, andernfalls innerhalb des anderen, bis in die Lage von β_1. Hierdurch geht das Vierflach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ isomorph mit sich selbst stetig in das andere $\beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ über. Ganz analog wird dieser Körper in das Vierflach $\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \alpha_4$, dieses in $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_4$, und dieses endlich in $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ übergeführt werden.

Gesetzt, der Satz sei successive für die Fälle $m = 5, 6, \ldots, n-1$ bewiesen. Um ihn auf den Fall $m = n$ auszudehnen, sind mehrere Eventualitäten zu erörtern.

1) Kommen unter den Grenzflächen der beiden n-eder, etwa in α_n und β_n, Dreiseite vor, so sind auch die beiden $(n-1)$-flache A_{n-1} und B_{n-1} offenbar allgemein und isomorph. Während nun A_{n-1} isomorph mit sich selbst stetig in B_{n-1} übergeführt wird, kann gleichzeitig die Ebene α_n so continuierlich fortbewegt werden, dafs sie stets aufserhalb der Ecken des zugehörigen $(n-1)$-flachs verbleibt. Bezeichnet α_n' ihre Endlage, so wird einer der beiden Räume $(\alpha_n', \beta_n)_1$ und $(\alpha_n', \beta_n)_2$ alle, der andere keine Ecke von B_{n-1} enthalten. Dann vollendet eine einfache Drehung von α_n' um die Gerade $|\alpha_n', \beta_n|$ innerhalb des zweiten Raumes die gewünschte Überführung von A_n in B_n.

2) Es seien unter den Grenzflächen von A_n und B_n zwar keine Dreiseite, aber in den Ebenen α_n und β_n zwei Grenzvierseite vorhanden. Dann werden die Körper A_{n-1} und B_{n-1} entweder ebenfalls isomorph oder benachbart allomorph sein. In beiden Fällen lasse man A_{n-1} continuierlich in B_{n-1} übergehen und zwar im ersten Falle isomorph mit sich selbst, im zweiten Falle durch einen Grenzzustand hindurch, in welchem eine Kreuzung der vier Seitenflächen des in α_n gelegenen Grenzvierseits eintritt. In jedem Falle kann aber die Ebene α_n gleichzeitig so stetig variiert werden, dafs sie aufserhalb der Ecken des jeweiligen $(n-1)$-flachs verharrt. Wenn daher A_{n-1} in B_{n-1} übergegangen ist, wird α_n stetig eine Lage α_n' angenommen haben, aus der sie durch einfache Drehung um $|\alpha_n', \beta_n|$ in die Lage β_n gelangt, ohne dabei eine Ecke von

B_{n-1} zu passieren. Dann aber ist wiederum A_n stetig und mit sich selbst isomorph in B_n übergeführt.

3) Wenn endlich A_n und B_n weder dreiseitige noch vierseitige Grenzflächen besitzen, so können und sollen die Ebenen α_n und β_n zu denjenigen gerechnet werden, welche Grenzfünfseite enthalten. Unter dieser Voraussetzung seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ und $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_5$ diejenigen Grenzebenen, welche resp. durch die Seiten der Fünfseite in α_n und β_n gehen. Dieselben bestimmen zusammen mit den zuletzt genannten zwei Ebenen je ein Sechsflach. Hierbei kommen aber mehrere Möglichkeiten in Frage:

a) Die beiden Sechsflache können in dem Sinne isomorph sein, dafs gleich indicierte Grenzflächen einander entsprechen. Dann sind auch die beiden $n-1$-flache A_{n-1} und B_{n-1} in demselben Sinne isomorph. In diesem Falle genügt es, A_{n-1} stetig und sich selbst isomorph in B_{n-1} überzuführen und dabei α_n so continuierlich fortzubewegen, dafs diese Ebene aufserhalb der Ecken des begleitenden $(n-1)$-flachs verbleibt, bis schliefslich eine einfache Drehung von α_n um die Schnittgerade $|\alpha_n, \beta_n|$ das n-flach A_n auf die verlangte Weise in B_n übergehen läfst.

b) Sind dagegen die beiden Sechsflache allomorph und nimmt man, was zulässig ist, an, dafs in α_1 und α_4 je ein Grenzdreiseit, in α_2 und α_3 je ein Grenzvierseit, in α_5 ein Grenzfünfseit gelegen sei, so hat man rücksichtlich des zweiten Sechsflachs im wesentlichen folgende zwei Constructionsweisen zu unterscheiden: Entweder enthalten β_1 und β_3 je ein Dreiseit, β_4 und β_5 je ein Vierseit, und β_2 ein Fünfseit, oder es liegen in β_2 und β_5 je ein Dreiseit, in β_3 und β_4 je ein Vierseit und in β_1 ein Fünfseit.

Im ersten Falle kann die Gerade $|\alpha_2, \alpha_4|$ nicht Kante von A_n sein, da sonst, dem Isomorphismus von A_n und B_n zufolge, die Gerade $|\beta_2, \beta_4|$ auch Kante von B_n und nicht von B_{n-1} wäre. Die Gerade $|\alpha_3, \alpha_5|$ ist daher Kreuzungskante von A_{n-1}.

Im zweiten Falle folgt aus analogen Gründen, dafs die Geraden $|\alpha_1, \alpha_3|$ und $|\alpha_1, \alpha_4|$ Kreuzungskanten von A_{n-1} sind. Wenn nun A_n isomorph mit sich selbst so stetig variiert

wird, dafs im ersten Falle einmal die vier Ebenen α_1, α_2, α_3, α_5, im zweiten Falle erst die vier Ebenen α_1, α_2, α_3, α_5 und dann die vier anderen α_1, α_3, α_4, α_5 zur Kreuzung gelangen, während Kreuzungen anderer Ebenenquadrupel ausgeschlossen bleiben, so gelingt es ohne Schädigung des morphologischen Charakters von A_n zunächst A_{n-1} mit B_{n-1} und darauf A_n mit B_n zur Deckung zu bringen.

Hiermit ist das aufgestellte Theorem vollständig nachgewiesen.

Zweiter Abschnitt.

Eine Classification der allgemeinen convexen Polyeder.

§ 7. Constituierende Flächensysteme.

Ich definiere ein System *gestaltlich unabhängiger* Grenzflächen eines gegebenen Polyeders als ein *constituierendes oder ein Stammsystem*, wenn durch die Anzahl, die Form und den gegenseitigen Zusammenhang seiner Elemente der morphologische Charakter des Polyeders vollkommen und unzweideutig bestimmt ist.

In dieser allgemeinsten Definition eines constituierenden Flächensystemes findet sich zunächst noch eine Unklarheit, nämlich der Begriff *des gegenseitigen Zusammenhanges mehrerer Grenzflächen.* Um denselben zu präcisieren, werde, wenn α_i Grenzebene des betrachteten Polyeders A_n ist, das in ihr gelegene m-seitige Grenzpolygon durch $\langle\alpha_i\rangle_m$ bezeichnet. Zwei Grenzflächen $\langle\alpha_i\rangle$ und $\langle\alpha_k\rangle$ können nun auf dreierlei Weise in directem Zusammenhange stehen: entweder haben sie eine Seite gemein, dann sage ich, sie seiten sich und schreibe dafür

$$\langle\alpha_i\rangle \mid \langle\alpha_k\rangle,$$

oder es existieren aufserhalb der beiden Flächen m Kanten *(Scheitelkanten)*, welche je eine Ecke der einen mit je einer Ecke der anderen verbinden, dann sage ich, die beiden Flächen sind m-fache Scheitelflächen und schreibe entsprechend

$$\langle\alpha_i\rangle\rangle\underset{m}{-}\langle\langle\alpha_k\rangle;$$

oder es finden endlich beide Umstände zugleich statt, dann schreibe ich

$$\langle\alpha_i\rangle \mid, \ \rangle\underset{m}{-}\langle\langle\alpha_k\rangle.$$

So hat man beispielsweise:

a) für den Zusammenhang zweier Seitenflächen eines Tetraeders:

$$\langle\alpha_1\rangle_3 \mid, \ \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_3;$$

b) für den Zusammenhang zweier Grenzvierseite eines Pentaeders:

$$\langle\alpha_1\rangle_4 \mid, \ \rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_4;$$

c) für den Zusammenhang zweier Grenzflächen eines Tetragonhexaeders:

$$\langle\alpha_1\rangle_4 \rangle\underset{4}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_4.$$

Jedes dieser drei Bespiele stellt offenbar ein constituierendes Flächensystem des bezüglichen Polyeders dar, indem einerseits die Flächen eines jeden Paares gestaltlich unabhängig sind, andrerseits ihr Constructionsresultat ein unzweideutiges ist. Im allgemeinen reicht, wie ein weiteres Beispiel zeigt, die alleinige Kenntnis des directen Zusammenhanges zwischen den Flächen eines constituierenden Systemes zur eindeutigen Construction des Polyeders nicht aus. Betrachtet man nämlich das Flächensystem:

$$\begin{array}{llll} \langle\alpha_1\rangle_6: & \rangle\underset{4}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_8, & \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_3, & \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_4\rangle_3, \\ \langle\alpha_2\rangle_8: & & \mid \ \langle\alpha_3\rangle_3, & \mid \ \langle\alpha_4\rangle_3, \end{array}$$

so genügen demselben im wesentlichen drei morphologisch verschiedene Dekaeder. Man erhält dieselben, je nachdem man von einem sechsseitigen Prisma mit den Grundflächen

$$\langle\alpha_1\rangle_6 \equiv \langle\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \cdots, \mathfrak{a}_6\rangle \quad \text{und} \quad \langle\alpha_2\rangle_6 = \langle\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{b}_6\rangle$$

mittelst der Flächen $\langle\alpha_3\rangle_3$ und $\langle\alpha_4\rangle_3$ zwei Ecken $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_{i+1}$, oder zwei Ecken $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_{i+2}$, oder zwei Ecken $\mathfrak{b}_i$ und $\mathfrak{b}_{i+3}$ abschneidet.

Zur vollständigen Charakterisierung des Zusammenhanges eines constituierenden Systemes sind daher noch die Seiten- und Scheitelflächen einer beliebigen Fläche desselben in derjenigen Reihenfolge anzugeben, in welcher sie bei einer einfachen, ihrem Sinne nach bestimmten Umschreibung besagter Fläche hervortreten. In diesem Sinne umfaſst das zuletzt angegebene Flächensystem die drei constituierenden Systeme:

$$
\begin{array}{lllll}
1) & \langle\alpha_1\rangle_6 : >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_3\rangle_3, & >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_4\rangle_3, & >\!\underset{4}{-}\!<\langle\alpha_2\rangle_8, & \\
 & \langle\alpha_2\rangle_8 : \quad | \quad \langle\alpha_3\rangle_3, & | \quad \langle\alpha_4\rangle_3, & >\!\underset{4}{-}\!<\langle\alpha_1\rangle_6. & \\
2) & \langle\alpha_1\rangle_6 : >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_3\rangle_3, & >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_2\rangle_8, & >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_4\rangle_3, & >\!\underset{3}{-}\!<\langle\alpha_2\rangle_8, \\
 & \langle\alpha_2\rangle_8 : \quad | \quad \langle\alpha_3\rangle_3, & >\!\underset{3}{-}\!<\langle\alpha_1\rangle_6, & | \quad \langle\alpha_4\rangle_3, & >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_1\rangle_6. \\
3) & \langle\alpha_1\rangle_6 : >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_3\rangle_3, & >\!\underset{2}{-}\!<\langle\alpha_2\rangle_8, & >\!\underset{1}{-}\!<\langle\alpha_4\rangle_3, & >\!\underset{2}{-}\!<\langle\alpha_2\rangle_8, \\
 & \langle\alpha_2\rangle_8 : \quad | \quad \langle\alpha_3\rangle_3, & >\!\underset{2}{-}\!<\langle\alpha_1\rangle_6, & | \quad \langle\alpha_4\rangle_3, & >\!\underset{2}{-}\!<\langle\alpha_1\rangle_6,
\end{array}
$$

Mit der Einführung der constituierenden Flächensysteme treten folgende zwei Fragen in den Vordergrund:

1) *Welches sind die allgemeinen Kriterien dafür, ob ein System beliebig herausgegriffener Grenzflächen eines gegebenen Polyeders ein constituierendes ist oder nicht?*

2) *Wie lautet eine allgemeine Regel, mittelst deren jedes constituierende Flächensystem gefunden werden kann?*

Was die Beantwortung der ersten Frage anlangt, so ergiebt sich, *daſs ein Flächensystem dann und nur dann ein constituierendes ist, wenn einerseits von den drei Bestimmungsflächen einer Ecke mindestens eine dem System angehört, und wenn andrerseits in jeder zugehörigen Fläche mindestens eine Ecke liegt, durch welche keine Systemfläche hindurchgeht.*

Von der Notwendigkeit dieser beiden Bedingungen überzeugt man sich leicht, wenn man die gegenteiligen Annahmen auf ihre Zulässigkeit hin prüft. Nun folgt aber aus der Annahme, daſs keine der drei in der Ecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ zusammenstoſsenden Flächen zu dem constituierenden Systeme gehört, daſs alle drei ihrer Form nach unbestimmt sind, da das Kappen der Ecke durch einen dreiseitigen Schnitt jenes System nicht alteriert, während die andere Annahme, daſs durch jede Ecke einer Fläche $\langle\alpha_i\rangle$ des constituierenden Systems mindestens noch eine zweite Fläche desselben hindurchgeht, unschwer erkennen läſst, daſs $\langle\alpha_i\rangle$ durch die übrigen Flächen der Constituante bereits mitbestimmt, also überschüssig ist.

Um zu zeigen, daſs die aufgestellten zwei Bedingungen auch hinreichend sind, wähle man irgend ein denselben entsprechendes Flächensystem

$$\langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \ldots, \langle\alpha_m\rangle,$$

dessen Zusammenhang als bekannt zu betrachten ist. Dann fallen die Ecken einer nicht zu dem ausgewählten Systeme gehörigen Seitenfläche $\langle\alpha_{m+h}\rangle$ von $\langle\alpha_1\rangle$ mit der Zahl und Lage nach ganz bestimmten Ecken der Flächen $\langle\alpha_2\rangle, \ldots, \langle\alpha_m\rangle$ zusammen, da zwei bei positivem Umlauf von $\langle\alpha_{m+h}\rangle$ auf einander folgende Ecken dieser Grenzfläche entweder durch eine Seitenkante eines Polygones $\langle\alpha_2\rangle$ oder durch eine Scheitelkante zweier Polygone $\langle\alpha_2\rangle$ und $\langle\alpha_3\rangle$ verbunden sind.

Die angegebene Entscheidung der ersten der zwei aufgeworfenen Fragen läfst zugleich auch die zweite beantworten. *Danach besteht für die Bestimmung eines constituierenden Systemes folgende allgemeine Regel:*

Man greife aus den Grenzflächen des gegebenen Polyeders A_n irgend zwei heraus, etwa $\langle\alpha_1\rangle$ und $\langle\alpha_2\rangle$. Giebt es aufserhalb derselben noch Ecken von A_n, so scheide man eine dritte durch eine solche Ecke gehende Fläche $\langle\alpha_3\rangle$ aus, und fahre, falls aufserhalb der drei Flächen $\langle\alpha_1\rangle$, $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_3\rangle$ auch noch Ecken von A_n vorkommen, in diesem Eliminationsprocess so lange fort, bis mit der letzten auscheidenden Fläche $\langle\alpha_m\rangle$ alle Ecken von A_n absorbiert sind. Nunmehr sehe man zu, ob $\langle\alpha_1\rangle$ eine Ecke besitzt, die in keiner zweiten der ausgeschiedenen Flächen enthalten ist. Trifft dies zu, so prüfe man ganz ebenso $\langle\alpha_2\rangle$ und successive die folgenden Flächen. Ist $\langle\alpha_h\rangle$ die erste Fläche des Systems, welche keine derartige Ecke besitzt, so scheide man dieselbe als durch die übrigen gestaltlich bestimmt aus dem Systeme aus, um alsdann die restierende Reihe

$$\cdots \langle\alpha_{h-1}\rangle, \langle\alpha_{h+1}\rangle, \cdots$$

von der Fläche $\langle\alpha_{h+1}\rangle$ ab dem gleichen Verfahren von neuem zu unterwerfen. *Dann wird das endgültig resultierende System ein constituierendes sein.*

Die constituierenden Flächensysteme eines und desselben Polyeders können schon in der Anzahl ihrer Elemente erheblich differieren. So stellen sowohl bei geradem n die beiden Flächensysteme

1) $\quad \langle\alpha_1\rangle_{n-2} \succ_{\overline{n-2}}\prec \langle\alpha_2\rangle_{n-2},$

2) $\quad \langle\alpha_3\rangle_4 \succ_{\overline{2}}\prec \langle\alpha_5\rangle_4 \succ_{\overline{2}}\prec \cdots \succ_{\overline{2}}\prec \langle\alpha_{n-3}\rangle_4 \succ_{\overline{2}}\prec \langle\alpha_{n-1}\rangle_4,$

als auch bei ungeradem n die beiden anderen

1) $\langle\alpha_1\rangle_{n-1} \,|,\, \rangle_{\overline{n-3}}\langle\langle\alpha_2\rangle_{n-1}$,

2) $\langle\alpha_3\rangle_3 \rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_5\rangle_4 \rangle_{\overline{2}}\langle \cdots \rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_{n-2}\rangle_4 \rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_n\rangle_3$

je ein und dasselbe n-eder dar.

§ 8. Die Stammsysteme der Heptaeder.

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen legen es nahe, alle diejenigen Flächensysteme in naturgemäſser, d. h. in von einfacheren zu complicierteren Systemen fortschreitender Folge zu entwickeln, welche als constituierende Systeme der verschiedenen Typen des allgemeinen convexen n-flachs auftreten. Es ist schon deshalb von Interesse, auf die Bestimmungsweise der n-eder ausführlicher einzugehen, als dieselbe für jedes beliebig gegebene n unmittelbar angewendet werden kann, ohne wie die § 4 besprochene Methode die Lösung der entsprechenden Aufgabe für die niederen Körperformen als schon bekannt voraussetzen zu müssen.

n-eder mit zweiflächigen Stammsystemen.

Sollen zwei Grenzpolygone $\langle\alpha_1\rangle_i$ und $\langle\alpha_2\rangle_k$ ein constituierendes System eines allgemeinen convexen n-flachs bestimmen, so sind zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

1) Die beiden Flächen haben keine gemeinsame Kante, d. h.

$$\langle\alpha_1\rangle_i \rangle_{\overline{i}}\langle\langle\alpha_2\rangle_k \quad \text{und} \quad \langle\alpha_2\rangle_k \rangle_{\overline{k}}\langle\langle\alpha_1\rangle_i;$$

dann ist:

$$\frac{i + k = 2n - 4,}{i = k = n - 2.}$$

2) Die beiden Flächen haben eine gemeinsame Kante, d. h.

$$\langle\alpha_1\rangle_i \,|,\, \rangle_{\overline{i-2}}\langle\langle\alpha_2\rangle_k \quad \text{und} \quad \langle\alpha_2\rangle_k \,|,\, \rangle_{\overline{k-2}}\langle\langle\alpha_1\rangle_i;$$

dann gilt:

$$\frac{i + k = 2n - 2,}{i = k = n - 1.}$$

n-eder mit dreiflächigen Stammsystemen.

Sollen die drei Grenzpolygone $\langle\alpha_1\rangle_i$, $\langle\alpha_2\rangle_k$, $\langle\alpha_3\rangle_l$ ein constituierendes System eines n-flachs bestimmen, so sind fünf Hauptfälle zu unterscheiden:

1) Die Flächen haben getrennte Kanten, d. h.

$$\langle\alpha_1\rangle_i \underset{p}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \langle\alpha_2\rangle_k \underset{q}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \langle\alpha_3\rangle_l \underset{r}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_1\rangle_i.$$

Hiernach gilt:

$$i + k + l = 2n - 4,$$
$$\underline{i = p + r, \quad k = p + q, \quad l = q + r,}$$
$$2p = i + k - l, \quad 2q = -i + k + l, \quad 2r = i - k + l.$$

2) Zwei Flächen, etwa $\langle\alpha_1\rangle_i$ und $\langle\alpha_2\rangle_k$ haben eine gemeinsame Kante, d. h.

$$\langle\alpha_1\rangle_i : | \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \underset{p_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \underset{p_2}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{p_3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k,$$
$$\langle\alpha_2\rangle_k : | \langle\alpha_1\rangle_i, \quad \underset{p_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_1\rangle_i, \quad \underset{q_2}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{p_3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_1\rangle_i.$$

Hiernach bestehen die Relationen:

$$i + k + l = 2n - 2,$$
$$\underline{i = 2 + p_1 + p_2 + p_3, \quad k = 2 + p_1 + q_2 + p_3, \quad l = p_2 + q_2,}$$
$$2p_2 = i - k + l, \quad 2q_2 = -i + k + l, \quad 2(p_1 + p_3) = i + k - l - 4.$$

3) Eine Fläche, etwa $\langle\alpha_1\rangle_i$, hat mit jeder der beiden anderen eine Kante gemein, d. h.

$$\langle\alpha_1\rangle_i : | \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \underset{p_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \underset{q_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad | \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{q_3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{p_3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k,$$
$$\langle\alpha_2\rangle_k \underset{r_2}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l.$$

Also gelten die Gleichungen:

$$i + k + l = 2n,$$
$$\underline{i = 4 + p_1 + p_3 + q_1 + q_3, \quad k = 2 + p_1 + r_2 + p_3, \quad l = 2 + q_1 + r_2 + q_3,}$$
$$2r_2 = k + l - i, \quad 2(p_1 + p_3) = i + k - l - 4, \quad 2(q_1 + q_3) = i - k + l - 4.$$

4) Die drei Flächen $\langle\alpha_1\rangle_i$, $\langle\alpha_2\rangle_k$, $\langle\alpha_3\rangle_l$ haben paarweise je eine Kante gemein, d. h.

$$\langle\alpha_1\rangle_i : | \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \underset{p_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k, \quad \underset{q_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad | \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{q_4}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{p_4}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_2\rangle_k,$$
$$\langle\alpha_2\rangle_k : | \langle\alpha_1\rangle_i, \quad \underset{p_1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_1\rangle_i, \quad \underset{r_2}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad | \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{r_3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_3\rangle_l, \quad \underset{p_4}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_1\rangle_i.$$

Demnach gelten die Relationen:

$$i + k + l = 2n + 2,$$
$$i = 4 + p_1 + q_1 + q_4 + p_4, \quad k = 4 + p_1 + r_2 + r_3 + p_4,$$
$$\underline{l = 4 + q_1 + r_2 + r_3 + q_4,}$$
$$2(p_1 + p_4) = i + k - l - 4, \quad 2(q_1 + q_4) = i - k + l - 4,$$
$$2(r_2 + r_3) = -i + k + l - 4.$$

5) Sollen endlich die drei Flächen $\langle\alpha_1\rangle_i$, $\langle\alpha_2\rangle_k$, $\langle\alpha_3\rangle_l$ eine Ecke gemein haben, so genügt es, im vorigen Falle die Annahmen zu machen:

$$p_4 = q_4 = r_3 = 0.$$

Dann erhält man:

$$2p_1 = i+k-l-4,\quad 2q_1 = i-k+l-4,\quad 2r_2 = -i+k+l-4.$$

n-eder mit m-flächigen Stammsystemen.

Die Gesichtspunkte für die Ermittlung der n-eder mit m-flächigen Stammsystemen stimmen mit den in den Fällen $m = 2, 3$ maßgebenden durchaus überein und lassen sich folgendermaßen ordnen:

a) Bestimmung der Formen der constituierenden Flächen

$$\langle\alpha_1\rangle_{\mu_1},\ \langle\alpha_2\rangle_{\mu_2},\ \cdots,\ \langle\alpha_m\rangle_{\mu_m},$$

d. h. Auflösung der Gleichung

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = 2n - 4 + 2k_1 - r_1$$

in positiven ganzen Zahlen

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_m,$$
$$3 \leqq \mu_i \leqq n-1,$$

wo k_1 die Anzahl der Flächenpaare mit gemeinsamer Kante, r_1 die Anzahl der Flächentripel mit gemeinsamer Ecke bezeichnet;

b) Herstellung aller möglichen Zusammenhangsweisen des der einzelnen Lösung entsprechenden Flächensystemes;

c) successive Erledigung beider Aufgaben für alle zulässigen Werte von k_1 und r_1.

Ich unterlasse ein näheres Eingehen auf diese Verhältnisse, da ein solches, an sich umständlich, für die Behandlung specieller Fälle keinen wesentlichen Nutzen bietet.

Um von den angedeuteten Methoden eine Anwendung zu machen, diene das Beispiel des Heptaeders.

I. Heptaeder mit zweiflächigen Stammsystemen.

1) $$\langle\alpha_1\rangle_5 \overline{\underset{5}{\rangle\langle}} \langle\alpha_2\rangle_5,$$

ein Heptaeder mit zwei Grenzfünf- und fünf Grenzvierseiten, entsteht aus einem Tetragon-Hexaeder durch das Abschneiden einer Kante;

2) $\langle\alpha_1\rangle_6\,|,\ \rangle\underset{4}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_6,$

ein Heptaeder mit zwei Grenzdrei-, drei Grenzvier- und zwei Grenzsechsseiten, entsteht aus I 1) durch Kreuzung der Flächen $\langle\alpha_1\rangle_5$ und $\langle\alpha_2\rangle_5$ längs einer ihrer Scheitelkanten.

II. Heptaeder mit dreiflächigen Stammsystemen.

1) $\langle\alpha_1\rangle_3\rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_4,\ \langle\alpha_2\rangle_4\rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_3,\ \langle\alpha_3\rangle_3\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_1\rangle_3,$

ein mit I 2) isomorpher Körper;

2a) $\langle\alpha_1\rangle_3\,|\,\langle\alpha_2\rangle_5,\ \langle\alpha_2\rangle_5\rangle\underset{3}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_4,\ \langle\alpha_3\rangle_4\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_1\rangle_3,$

ein Heptaeder mit einem Grenzdrei-, drei Grenzvier- und drei Grenzfünfseiten, entsteht aus einem Tetragonhexaeder durch das Abschneiden einer Ecke;

2b) $\langle\alpha_1\rangle_4\rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_4,\ \langle\alpha_2\rangle_4\,|\,\langle\alpha_3\rangle_4,\ \langle\alpha_3\rangle_4\rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_1\rangle_4,$

ein mit I 1) isomorpher Körper;

2c) $\langle\alpha_2\rangle_5:\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_1\rangle_4,\ \,|\,\langle\alpha_1\rangle_4,\ \rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_3,$
$\langle\alpha_1\rangle_4\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_3,$

ein Heptaeder mit zwei Grenzdrei-, zwei Grenzvier-, zwei Grenzfünf- und einem Grenzsechsseit, entsteht aus II 1) durch Kreuzung der Flächen $\langle\alpha_1\rangle_3$ und $\langle\alpha_2\rangle_4$ längs ihrer Scheitelkante;

3a) $\langle\alpha_1\rangle_6:\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_4,\ \,|\,\langle\alpha_2\rangle_4,\ \,|\,\langle\alpha_3\rangle_4,\ \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_4,$
$\langle\alpha_2\rangle_4\rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_4,$

ein Körper vom Typus II 1);

3b) $\langle\alpha_1\rangle_6:\,|\,\langle\alpha_2\rangle_5,\ \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_5,\ |\,\langle\alpha_3\rangle_3,\ \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_5\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_3,$

ein Heptaeder mit drei Grenzdrei-, drei Grenzfünf- und einem Grenzsechsseit, entsteht aus einem Tetraeder durch das Kappen dreier Ecken;

3c) $\langle\alpha_1\rangle_6:\,|\,\langle\alpha_2\rangle_3,\ \rangle\underset{2}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_5,\ \,|\,\langle\alpha_3\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_3\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_5,$

ein Körper vom Typus 2c);

3d) $\langle\alpha_1\rangle_6:\,|\,\langle\alpha_2\rangle_4,\ \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_2\rangle_4,\ \,|\,\langle\alpha_3\rangle_4,\ \rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_4,$
$\langle\alpha_2\rangle_4\rangle\underset{1}{-}\langle\langle\alpha_3\rangle_4,$

ein mit dem vorherigen isomorpher Körper;

3e) $\langle\alpha_1\rangle_5 : |\,\langle\alpha_2\rangle_4, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5, \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_4 \succ\!\underset{2}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5,$

ein mit 2a) isomorpher Körper;

4a) $\langle\alpha_1\rangle_6 : |\,\langle\alpha_2\rangle_5, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_5, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5, \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_5 \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5,$

ein mit 3b) isomorpher Körper;

4b) $\langle\alpha_1\rangle_6 : |\,\langle\alpha_2\rangle_5, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5, \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_5 \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5,$

ein mit 2c) isomorpher Körper;

5a) $\langle\alpha_1\rangle_5 : \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_5, \; |\,\langle\alpha_2\rangle_5, \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_5 \,|, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5,$

ein Körper vom Typus 3b);

5b) $\langle\alpha_1\rangle_6 : \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_4, \; |\,\langle\alpha_2\rangle_4, \; |\,\langle\alpha_3\rangle_5, \; \succ\!\underset{2}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_4 \,|\,\langle\alpha_3\rangle_5,$

ein Körper vom Typus 2c).

III. Heptaeder mit vierflächigen Stammsystemen.

1a) $\langle\alpha_1\rangle_3 \,|\,\langle\alpha_2\rangle_4, \; \langle\alpha_2\rangle_4 \succ\!\underset{2}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_4, \; \langle\alpha_3\rangle_4 \,|\,\langle\alpha_4\rangle_3,$
$\langle\alpha_1\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_3,$ I 2);

1b) $\langle\alpha_1\rangle_5 : |\,\langle\alpha_2\rangle_3, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_3, \; |\,\langle\alpha_4\rangle_3, \; \langle\alpha_2\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_3,$
$\langle\alpha_3\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_3, \; \langle\alpha_4\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_3,$ II 3b);

1c) $\langle\alpha_1\rangle_3 \,|\,\langle\alpha_2\rangle_4, \quad \langle\alpha_3\rangle_3 \,|\,\langle\alpha_4\rangle_4,$
$\langle\alpha_1\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_4, \; \langle\alpha_4\rangle_4 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_4, \; \langle\alpha_2\rangle_4 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_3,$ II 2c);

2) $\langle\alpha_1\rangle_5 : |\,\langle\alpha_2\rangle_3, |\,\langle\alpha_3\rangle_5, \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_5, \langle\alpha_3\rangle_5 : |\,\langle\alpha_4\rangle_3, |\,\langle\alpha_1\rangle_5, \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_1\rangle_5,$
$\langle\alpha_2\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_3,$ II 3b);

3a) $\langle\alpha_1\rangle_3 : \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_4, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_3\rangle_4, \; \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_4,$
$\langle\alpha_2\rangle_4 \,|\,\langle\alpha_3\rangle_4, \; \langle\alpha_3\rangle_4 \,|\,\langle\alpha_4\rangle_4, \; \langle\alpha_4\rangle_4 \,|\,\langle\alpha_2\rangle_4,$ II 2a);

3b) $\langle\alpha_1\rangle_6 : |\,\langle\alpha_2\rangle_4, \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_4, |\,\langle\alpha_3\rangle_3, |\,\langle\alpha_4\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_3 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_4,$ I 2);

4) $\langle\alpha_1\rangle_5 : |\,\langle\alpha_2\rangle_4, \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_2\rangle_4, |\,\langle\alpha_4\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_5 : \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_4, |\,\langle\alpha_4\rangle_4, |\,\langle\alpha_2\rangle_4,$
$\langle\alpha_1\rangle_5 \,|\,\langle\alpha_3\rangle_5, \; \langle\alpha_2\rangle_4 \succ\!\underset{1}{-}\!\prec\langle\alpha_4\rangle_4,$ II 2c).

Die angegebenen Flächensysteme umfassen alle constituierenden Systeme der allgemeinen convexen Heptaeder. Danach giebt es im ganzen fünf allomorphe Typen dieser Körper.

§ 9. Vollständige Scheitelflächensysteme.

Es gilt folgender Satz:

Ist irgend ein Polyeder A_n gegeben, und construiert man zu irgend einer Grenzfläche $\langle \alpha_1 \rangle$ desselben die Scheitelflächen, zu jeder von diesen wieder die Scheitelflächen, und so fort, dann wird unter den also erhaltenen unmittelbaren und mittelbaren Scheitelflächen von $\langle \alpha_1 \rangle$ mindestens auch eine der drei Bestimmungsflächen $\langle \alpha_i \rangle$, $\langle \alpha_k \rangle$, $\langle \alpha_l \rangle$ einer beliebigen Ecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ vertreten sein.

Zum Beweise bestimme man etwa mittelst eines durch die Ecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ entsprechend gelegten ebenen Querschnittes von A_n eine Flächenreihe

$$\langle \alpha_1 \rangle, \langle \alpha_{a_1} \rangle, \langle \alpha_{a_2} \rangle, \cdots, \langle \alpha_{a_\nu} \rangle, \langle \alpha_i \rangle, \langle \alpha_k \rangle,$$

in welcher je zwei benachbarte Flächen eine Kante gemein haben. Wenn dann allgemein mit $\langle \beta_h \rangle$ eine der beiden die Endpunkte der Kante $| \alpha_{a_h}, \alpha_{a_{h+1}} |$ bestimmenden Grenzflächen bezeichnet wird, so wird, falls die Anzahl der Seiten von $\langle \alpha_{a_1} \rangle$ eine ungerade ist, sowohl $\langle \alpha_{a_2} \rangle$ als $\langle \beta_1 \rangle$, falls dieselbe eine gerade, zum mindesten eine von beiden mittelbare Scheitelfläche von $\langle \alpha_1 \rangle$ sein. Genau nach demselben Schlufs ist aber mindestens eine der beiden Flächen $\langle \alpha_{a_3} \rangle$ und $\langle \beta_2 \rangle$ Scheitelfläche von $\langle \beta_1 \rangle$, und folglich mindestens eine der *drei* Flächen $\langle \alpha_{a_2} \rangle$, $\langle \alpha_{a_3} \rangle$, $\langle \beta_2 \rangle$ auch Scheitelfläche von $\langle \alpha_1 \rangle$. Indem man diese Schlufsweise längs der aufgestellten Flächenreihe fortsetzt, gelangt man schliefslich auch zu den drei Bestimmungsflächen der Ecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$. Q. e. d.

Das eben erörterte Beweisverfahren zeigt gleichzeitig, dafs, wenn statt der einen Grenzfläche $\langle \alpha_1 \rangle$ zwei Flächen mit gemeinsamer Kante oder drei Flächen mit gemeinsamer Ecke zur Basis der Construction gewählt werden, dann auch resp. mindestens zwei, oder alle drei Bestimmungsflächen irgend einer Ecke dem resultierenden Flächensysteme angehören. Hieraus folgt der Satz:

Ist auf einem allgemeinen convexen Polyeder ein vollständiges System von Scheitelflächen bestimmt, so werden, falls durch irgend eine, so auch durch jede andere Ecke des Polyeders eine, zwei oder drei Flächen des Systems gehen.

Gesetzt, es liege auf dem Polyeder A_n als vollständiges Scheitelflächensystem Σ_1 der Grenzfläche α_1 ein System der ersten Art vor:

$$\Sigma_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \cdots, \langle\alpha_{m-1}\rangle, \langle\alpha_m\rangle,$$

so folgt, dafs jede der übrigen $n - m$ Grenzflächen $\langle\alpha_{m+h}\rangle$ durch eine *gerade* Zahl von Seiten begrenzt sein mufs.

Denn hätte eine Fläche $\langle\alpha_{m+h}\rangle$ eine ungerade Anzahl von Seiten, dann würden alle ihre Seitenflächen als mittelbare Scheitelflächen von einander zu dem Systeme Σ_1 gehören, und also zwei Flächen desselben entgegen der Voraussetzung sich seiten.

Es sind nun zwei Fälle möglich:

I. Entweder giebt es unter den Flächen $\langle\alpha_1\rangle, \cdots, \langle\alpha_m\rangle$ mindestens ein Polygon unpaarer Ordnung,

II. oder diese Flächen sind durchgängig Polygone paarer Ordnung.

Im ersten Falle sind zwei Flächen $\langle\alpha_{m+h_1}\rangle$ und $\langle\alpha_{m+h_2}\rangle$, welche durch dieselbe Ecke eines unpaaren Polygones $\langle\alpha_{m-i}\rangle$ gehen, mittelbare Scheitelflächen. Es constituieren daher alle $n - m$ Flächen $\langle\alpha_{m+h}\rangle$ ein einziges in sich geschlossenes System von Scheitelflächen.

Im zweiten Falle construiere man zu der Fläche $\langle\alpha_{m+1}\rangle$ das vollständige Scheitelflächensystem, nämlich:

$$\begin{array}{c} \langle\alpha_{m+1}\rangle, \\ \langle\alpha_{m+2}\rangle, \langle\alpha_{m+3}\rangle, \cdots, \langle\alpha_{m_1-1}\rangle, \langle\alpha_{m_1}\rangle, \\ \langle\alpha_{m_1+1}\rangle, \langle\alpha_{m_1+2}\rangle, \cdots, \langle\alpha_{m_2-1}\rangle, \langle\alpha_{m_2}\rangle, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

wo die Flächen der i^{ten} Zeile diejenigen Scheitelflächen der Flächen der $i - 1^{\text{ten}}$ Zeile darstellen, welche nicht schon unter den Flächen der ersten $i - 2$ Zeilen vorhanden sind.

Angenommen nun, es existieren unter den Flächen dieses Systemes etwa in der k^{ten} und l^{ten} Zeile, zwei Flächen $\langle\alpha_{m+h_1}\rangle$ und $\langle\alpha_{m+h_2}\rangle$, welche sich seiten, so lassen sich dieselben durch eine Flächenreihe von dem Zusammenhange verbinden:

*) $\langle\alpha_{m+h_1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha'_{k-1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\cdots$

$\cdots\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_2'\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_{m+1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_2''\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_3''\rangle\cdots$

$\cdots\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha''_{l-1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\rangle\langle\alpha_{m+h_2}\rangle,$

unter $\langle\alpha'_{k-h}\rangle$ und $\langle\alpha''_{l-h}\rangle$ Flächen aus resp. der $k-h^{\text{ten}}$ und der $l-h^{\text{ten}}$ Zeile verstanden.

In dem Falle, dafs in diesem Verbindungssysteme zwei Flächen, etwa $\langle\alpha'_{k-a}\rangle$ und $\langle\alpha''_{l-b}\rangle$, identisch sind, ersetze ich dasselbe durch das gleichartige andere

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha'_{k-1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha'_{k-2}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\cdots$$

$$\cdots\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha'_{k-a}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha''_{l-b+1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha''_{l-b+2}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\cdots$$

$$\cdots\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha''_{l-1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_{m+h_2}\rangle,$$

und ich fahre in dieser Reduction so lange fort, bis ich auf ein Verbindungssystem der beiden Flächen $\langle\alpha_{m+h_1}\rangle$ und $\langle\alpha_{m+h_2}\rangle$ komme, dessen Flächen sämtlich verschieden sind.

Unter der Voraussetzung, dafs diese Bedingung bereits für das ursprüngliche Verbindungssystem erfüllt sei, construiere man, wenn die Flächenpaare:

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle,\ \langle\alpha'_{k-1}\rangle;\ \langle\alpha'_{k-1}\rangle,\ \langle\alpha'_{k-2}\rangle,\ \cdots,$$

$$\cdots\langle\alpha''_{l-2}\rangle,\ \langle\alpha''_{l-1}\rangle;\ \langle\alpha''_{l-1}\rangle,\ \langle\alpha_{m+h_2}\rangle$$

verbunden sind durch die Scheitelkanten

$$|\,\mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3\,|,\quad|\,\mathfrak{p}_4,\ \mathfrak{p}_5\,|\cdots|\,\mathfrak{p}_{q-3},\ \mathfrak{p}_{q-2}\,|,\quad|\,\mathfrak{p}_{q-1},\ \mathfrak{p}_q\,|,$$

$$q=2k+2l+1,$$

aus einem Punkte $\mathfrak{p}_1$ der Kante $|\,\alpha_{m+h_1},\ \alpha_{m+h_2}\,|$ das Polygon:

$$\langle\mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \mathfrak{p}_3,\ \cdots,\ \mathfrak{p}_q,\ \mathfrak{p}_1\rangle.$$

Dasselbe spaltet die gesamte Oberfläche S von A_n in zwei einander ausschliefsende einfach zusammenhängende Stücke S_1 und S_2, welche abgesehen von Teilen der Flächen

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle,\ \langle\alpha'_{k-1}\rangle,\ \cdots,\ \langle\alpha''_{l-1}\rangle,\ \langle\alpha_{m+h_2}\rangle$$

noch resp. n_1 und n_2 vollständige Grenzflächen enthalten. Dann ist es stets möglich, innerhalb eines dieser beiden Flächenstücke, etwa innerhalb S_1, eine der obigen gleichartige Verbindungsreihe von $\langle\alpha_{m+h_1}\rangle$ und $\langle\alpha_{m+h_2}\rangle$ anzugeben, welche

*) Es widerspricht nicht der Voraussetzung, wenn zwei aufeinanderfolgende Flächen dieser Reihe sich mehr als einmal scheiteln.

ein Flächenstück S_1' von S_1 einschliefst, so dafs die Anzahl n_1' seiner totalen Grenzflächen um mindestens eine Einheit kleiner ist als die Zahl n_1. Es reicht dazu hin, wenn $\langle\beta_1\rangle$ diejenige Fläche von S_1 ist, welche durch die Kante $|\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|$ geht und, wenn dieselbe die aufeinander folgenden Seitenflächen besitzt,

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle, \langle\beta_2\rangle, \langle\beta_3\rangle, \cdots, \langle\beta_{2g}\rangle, \langle\alpha'_{k-1}\rangle, \langle\gamma_1\rangle,$$

in das ursprüngliche Verbindungssystem

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha'_{k-1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\cdots\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha''_{l-1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha_{m+h_2}\rangle$$

statt des Zusammenhanges

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha'_{k-1}\rangle$$

den andern einzuführen:

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\beta_3\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\beta_5\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\cdots\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\beta_{2g-1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha'_{k-1}\rangle.$$

Das dem neuen Verbindungssysteme entsprechende Flächensystem S_1' wird dann eine Fläche, nämlich $\langle\beta_1\rangle$, weniger enthalten wie S_1.

Nachdem man das neue Verbindungssystem, falls es notwendig ist, auf ein anderes gleichartiges reduciert hat, dessen Elemente sämtlich verschieden sind, kann man das angegebene Eliminationsverfahren wiederholen und zwischen $\langle\alpha_{m+h_1}\rangle$ und $\langle\alpha_{m+h_2}\rangle$ ein Verbindungssystem herstellen, dessen zugehörige Fläche S_1'' höchstens noch n_{1-2} totale Grenzflächen umfasst. Bei fortgesetzter Reduction wird man so schliefslich auf ein Verbindungssystem geführt:

$$\langle\alpha_{m+h_1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha_{p_1}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha_{p_2}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\cdots\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha_{p_r}\rangle\rangle\overline{\underset{1}{\;}}\langle\langle\alpha_{m+h_2}\rangle,$$

dessen Flächen die Seitenflächen ein und derselben Fläche $\langle\alpha_x\rangle$ sind.

Aus der Existenz eines solchen Verbindungssystemes folgt aber mit Notwendigkeit, dafs die Anzahl der Seiten von $\langle\alpha_x\rangle$ eine *ungerade* Zahl ist. Das aber ist unmöglich, da A_n nur Grenzflächen paarer Ordnung besitzt. Die anfangs gemachte Annahme, dafs unter den Scheitelflächen von $\langle\alpha_{m+1}\rangle$ zwei Flächen mit gemeinsamer Kante vorkommen, ist also unzulässig.

Fafst man alles zusammen, so kann man folgendes Resultat aussprechen:

Theorem 3. *Ist irgend ein allgemeines convexes Polyeder* A_n *gegeben, und construiert man zu irgend drei in einer Ecke zusammenstofsenden Grenzflächen* $\langle\alpha_i\rangle$, $\langle\alpha_k\rangle$, $\langle\alpha_l\rangle$ *desselben die vollständigen Systeme* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *ihrer Scheitelflächen, so können folgende drei Fälle eintreten:*

1) *Entweder fallen alle drei Systeme in ein einziges zusammen (Fall des Tetraeders);*

2) *oder es coincidieren nur zwei Systeme (Fall des Pentaeders);*

3) *oder alle drei Systeme verlaufen getrennt (Fall des Tetragonhexaeders).*

Für das Eintreten des ersten Falles ist es notwendig, dafs A_n Flächen unpaarer Ordnung besitzt, und zwar reicht es dann beispielsweise hin, dafs zwei derselben sich seiten. — Auch im zweiten Falle müssen unpaare Grenzflächen auftreten, und zwar gehören diese alsdann zu demselben die Ecken des Polyeders nur einfach enthaltenden Scheitelflächensysteme, während die aufserhalb des letzteren gelegenen paaren Flächen ein zweites vollständiges Scheitelflächensystem constituieren. — Der dritte Fall tritt ein, wenn A_n nur paare Grenzflächen besitzt.

Ich teile diesen drei Möglichkeiten entsprechend die Polyeder in drei Klassen: in Polyeder mit einem, mit zwei und mit drei vollständigen Scheitelflächensystemen, Polyeder der ersten, zweiten und dritten Klasse.

An diese Unterscheidung der allgemeinen convexen Polyeder knüpft sich naturgemäfs die Aufgabe: *Aus einem gegebenen Polyeder der Klasse a mittelst einer Reihe von Fundamentalconstructionen ein Polyeder der Klasse b abzuleiten.*

Die Behandlung dieses Problemes modificiert sich je nach den drei Annahmen:

$$1)\quad a > b, \qquad 2)\quad a < b, \qquad 3)\quad a = b.$$

1) Aus einem Polyeder A_n der dritten Klasse erhält man eines der zweiten, sowohl, indem man eine Kante von A_n mittelst einer Fläche $\langle\alpha_{n+1}\rangle_4$ abschneidet, als auch, indem man eines der Grenzvierseite von A_n ausscheidet, und man findet weiter ein Polyeder der ersten Klasse, indem man entweder

von A_n selbst oder von einem der erhaltenen zwei Körper der zweiten Klasse eine Ecke abschneidet.

2) Ist aus einem Polyeder A_n der ersten Klasse zunächst ein Polyeder der zweiten zu construieren, so bestimme man auf ersterem irgend ein constituierendes Flächensystem:

$$\langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \cdots, \langle\alpha_{m-1}\rangle, \langle\alpha_m\rangle.$$

Kommen in diesem Systeme $\mu \doteq > 1$ Paare einander seitender Flächen vor:

$$\langle\alpha_a\rangle, \langle\alpha_b\rangle; \langle\alpha_c\rangle, \langle\alpha_d\rangle; \cdots; \langle\alpha_p\rangle, \langle\alpha_q\rangle,$$

so schneide man successive von dem n-flach A_n mittelst der Fläche $\langle\alpha_{n+1}\rangle_4$ die Kante $|\alpha_a, \alpha_b|$, von dem resultierenden $(n+1)$-flach A_{n+1} mittelst der Fläche $\langle\alpha_{n+2}\rangle_4$ die Kante $|\alpha_c, \alpha_d|$, u. s. w., schliefslich von dem $(n+\mu-1)$-flach $A_{n+\mu-1}$ mittelst der Fläche $\langle\alpha_{n+\mu}\rangle_4$ die Kante $|\alpha_p, \alpha_q|$ ab. Durch dieses Verfahren tritt für den Zusammenhang:

$$\langle\alpha_g\rangle \mid \langle\alpha_h\rangle$$

der andere ein

$$\langle\alpha_g\rangle \underset{2}{\top} \langle\alpha_h\rangle.$$

Aus dem constituierenden Systeme:

$$\langle\alpha_1\rangle_{r_1}, \langle\alpha_2\rangle_{r_2}, \cdots, \langle\alpha_m\rangle_{r_m}$$

des n-flachs A_n wird wieder ein constituierendes und zugleich*) vollständiges Scheitelflächensystem

$$\langle\alpha_1\rangle_{s_1}, \langle\alpha_2\rangle_{s_2}, \ldots, \langle\alpha_m\rangle_{s_m}$$

des $(n+\mu)$-flachs $A_{n+\mu}$, und letzteres gehört demgemäfs zur zweiten Klasse.

Offenbar genügt es, das hier beschriebene Verfahren auf ein nur aus paaren Flächen bestehendes, kein Flächentripel mit gemeinsamer Ecke enthaltendes, constituierendes System von A_n anzuwenden, um diesen Körper in ein Polyeder der dritten Klasse zu verwandeln. Man kann aber auch, und das wird geschehen müssen, wenn ein solches System fehlt, aus A_n zuerst ein Polyeder $A_{n+\mu}$ der zweiten Klasse construieren

*) Enthält das constituierende Flächensystem von A_n keine drei in einer Ecke zusammenstofsende Flächen, so läfst die angegebene Construction die Formen seiner Flächen unverändert, d. h., es ist allgemein $s_i = r_i$.

und dann folgendermaſsen vorgehen: Man greife aus den stets in gerader Anzahl vorhandenen unpaaren Grenzflächen desselben irgend zwei $\langle\alpha_1\rangle$ und $\langle\alpha_2\rangle$ heraus. Diese verbinde man durch ein System:

$$\langle\alpha_1\rangle\rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_{i_1}\rangle\ \rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_{i_2}\rangle\rangle\frac{}{1}\langle\cdots\rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_{i_h}\rangle\rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_2\rangle\,^{*})$$

und schneide mit Bezug auf jedes Paar benachbarter Flächen desselben je eine verbindende Scheitelkante ab. Dadurch werden die beiden Endflächen um je eine, alle Zwischenflächen aber um je zwei Seiten vermehrt und der Zusammenhang:

$$\langle\alpha_1\rangle\rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_{i_1}\rangle\rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_{i_2}\rangle\ \cdots\ \rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_{i_h}\rangle\rangle\frac{}{1}\langle\langle\alpha_2\rangle$$

durch den andern ersetzt

$$\langle\alpha_1\rangle\rangle\frac{}{2}\langle\langle\alpha_{i_1}\rangle\ \rangle\frac{}{2}\langle\langle\alpha_{i_2}\rangle\ \cdots\ \rangle\frac{}{2}\langle\langle\alpha_{i_h}\rangle\rangle\frac{}{2}\langle\langle\alpha_2\rangle.$$

Wie vorher in $A_{n+\mu}$ bestimmen auch in dem resultierenden Polyeder $A_{n+\mu+\nu}$ die Flächen

$$\langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \cdots,\ \langle\alpha_{m-1}\rangle,\ \langle\alpha_m\rangle$$

ein vollständiges Scheitelflächensystem, nur daſs die Anzahl der unpaaren Flächen desselben um zwei Einheiten vermindert worden ist.

Bezeichnet daher 2ϱ die Zahl der unpaaren Flächen von $A_{n+\mu}$, so wird eine ϱ-malige Wiederholung der ausgeführten Operation das Polyeder $A_{n+\mu}$ der zweiten Klasse in ein Polyeder der dritten Klasse überführen.

Unter allen möglichen Verwandlungen eines Körpers A_n der ersten Klasse in einen Körper $A_{n'}$ der zweiten Klasse und aus diesem in einen der dritten Klasse sei die folgende besonders hervorgehoben:

Man kappe von A_n die $2n - 4$ Ecken mittelst ebensovieler dreiseitiger Schnitte und von dem resultierenden $(3n - 4)$-flach A_{3n-4} die $3n - 6$ das System der Grenzdreiseite des letzteren verbindenden Scheitelkanten mittelst ebensovieler vierseitiger Schnitte. Dann wird das Polyeder A_{3n-4} der zweiten, das zuletzt erhaltene Polyeder A_{6n-10} der dritten Klasse angehören.

---

*) Die Möglichkeit einer solchen Verbindung folgt aus der S. 39 gegebenen schematischen Anordnung der unmittelbaren und mittelbaren Scheitelflächen einer Grenzfläche.

Die Anzahlen y_h und z_h,

$$h = 3, 4, \ldots,$$

der h-seitigen Grenzflächen von resp. A_{3n-4} und A_{6n-10} sind durch die Zahlen x_h von A_n wie folgt bestimmt:

$$y_3 = 2n-4, \; y_4 = y_5 = 0, \; y_6 = 2x_3, \; y_7 = 0, \; y_8 = 2x_4, \ldots,$$
$$z_3 = 0, z_4 = 3n-6, z_5 = 0, z_6 = 2n-4+2x_3, z_7 = 0, z_8 = 2x_4, \ldots.$$

3) Handelt es sich endlich darum, aus A_n ein Polyeder derselben Klasse zu bestimmen, so kann das, von anderen der Klasse und der speciellen Natur des Polyeders A_n sich anpassenden Methoden abgesehen, durch nachstehende zwei für alle drei Klassen anwendbare invariante Constructionen geschehen:

1) Man kappe von A_n mittelst der Ebene α_{n+1} eine beliebige Ecke $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$, darauf von dem resultierenden $(n+1)$-flach A_{n+1} mittelst der Fläche α_{n+2} die Ecke $(\alpha_i, \alpha_l, \alpha_{n+1})$ und schliefslich von dem $(n+2)$-flach A_{n+2} mittelst der Ebene α_{n+3} die Kante $|\,\alpha_i, \alpha_{n+1}\,|$;

2) man schneide von A_n mittelst der Ebene α_{n+1} die Kante $|\,\alpha_k, \alpha_l\,|$ und von dem resultierenden $(n+1)$-flach A_{n+1} mittelst der Ebene α_{n+2} die Kante $|\,\alpha_{n+1}, \alpha_l\,|$ ab, so genügt sowohl das im ersten Falle entstehende $(n+3)$-flach A_{n+3}, als auch das im zweiten hervorgehende $(n+2)$-flach A_{n+2} den Forderungen der Aufgabe.

Zum Beweise führe ich noch ein: a) die Scheitelfläche $\langle\alpha_m\rangle$ der Fläche $\langle\alpha_i\rangle$ bezüglich der Kante $|\,\alpha_k, \alpha_l\,|$, b) die Scheitelflächen $\langle\alpha_{k_1}\rangle$, $\langle\alpha_{k_2}\rangle$ der Fläche $\langle\alpha_k\rangle$ bezw. der Kanten $|\,\alpha_i, \alpha_l\,|$, $|\,\alpha_m, \alpha_l\,|$, c) die Scheitelflächen $\langle\alpha_{l_1}\rangle$, $\langle\alpha_{l_2}\rangle$ der Fläche $\langle\alpha_l\rangle$ bezw. der Kanten $|\,\alpha_i\alpha_k\,|$ und $|\,\alpha_m\alpha_k\,|$. Die erste Construction ändert nur die Beziehungen

$$1)\ \langle\alpha_i\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_m\rangle, \qquad 2)\ \langle\alpha_k\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{k_1}\rangle, \qquad 3)\ \langle\alpha_l\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{l_1}\rangle,$$

die zweite nur die Beziehungen

$$1)\ \langle\alpha_k\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{k_1}\rangle, \langle\alpha_{k_2}\rangle, \qquad 2)\ \langle\alpha_l\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{l_1}\rangle, \langle\alpha_{l_2}\rangle,$$

und zwar treten an die Stelle der ersten die anderen:

$$1)\ \begin{matrix}\langle\alpha_i\rangle \underset{3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{n+1}\rangle, \\ \langle\alpha_{n+1}\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_m\rangle,\end{matrix} \qquad 2)\ \begin{matrix}\langle\alpha_k\rangle \underset{3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{n+2}\rangle, \\ \langle\alpha_{n+2}\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{k_1}\rangle,\end{matrix} \qquad 3)\ \begin{matrix}\langle\alpha_l\rangle \underset{3}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{n+3}\rangle, \\ \langle\alpha_{n+3}\rangle \underset{1}{\succ\!\!\prec} \langle\alpha_{l_1}\rangle;\end{matrix}$$

an Stelle der letzteren aber:

$$1)\ \begin{matrix}\langle\alpha_k\rangle\rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_{n+1}\rangle\\ \langle\alpha_{n+1}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_{k_1}\rangle,\langle\alpha_{k_2}\rangle,\end{matrix}\qquad 2)\ \begin{matrix}\langle\alpha_l\rangle\rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_{n+2}\rangle,\\ \langle\alpha_{n+2}\rangle\rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_{l_1}\rangle,\langle\alpha_{l_2}\rangle.\end{matrix}$$

Hieraus folgt aber, daſs die Klasse des Polyeders durch die beiden Operationen nicht geändert wird.

Hit Hilfe dieses Ergebnisses kann leicht gezeigt werden, *daſs, falls $n \overline{\overline{>}} 8$ ist, unter den verschiedenen Typen des allgemeinen convexen n-flaches stets Vertreter aller drei Klassen vorhanden sind.* Hierzu braucht man nur unter den 8- und unter den 9-flächigen Polyedern für jede Klasse je einen Repräsentanten zu bestimmen. Man erhält solche durch folgende Constructionen:

1) Man kappe von einem Tetragonhexaeder A_6, a) mittelst der Flächen $\langle\alpha_7\rangle_3$ und $\langle\alpha_8\rangle_3$ resp. die Gegenecken $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $(\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$, b) mittelst der Flächen $\langle\alpha_7\rangle_5$ und $\langle\alpha_8\rangle_4$ resp. das Kantenpaar (α_1, α_2), (α_1, α_3) und die Kante (α_1, α_7), c) mittelst der Flächen $\langle\alpha_7\rangle_4$ und $\langle\alpha_8\rangle_4$ resp. die Kanten (α_1, α_2) und (α_4, α_5), so erhält man a) ein 8-flach A_8' der ersten, b) ein 8-flach A_8'' der zweiten, c) ein 8-flach A_8''' der dritten Klasse.

2) Schneidet man jetzt a) von A_8' mittelst der Fläche $\langle\alpha_9\rangle_3$ irgend eine Ecke, b) von A_8''' mittelst einer Fläche $\langle\alpha_9\rangle_4$ die Kante (α_3, α_7), c) von A_8'' mittelst einer Fläche $\langle\alpha_9\rangle_4$ die Kante (α_5, α_8) ab, so erhält man a) ein 9-flach A_9' der ersten, b) ein 9-flach A_9'' der zweiten, c) ein 9-flach A_9''' der dritten Klasse.

§ 10. Einige specielle Polyeder.

Bekanntlich werden die archimedischen Polyeder durch die Bedingung bestimmt, daſs je zwei Ecken eines solchen Körpers entweder congruent oder symmetrisch sind. Verlangt man nur, daſs die Ecken eines der gesuchten Körper sämtlich isomorph seien und beschränkt man sich dabei auf die Polyeder mit durchweg dreikantigen Ecken, so erkennt man die Aufgabe als identisch mit der andern:

Diejenigen Polyeder zu bestimmen, für welche die Grenzflächen eines jeden ihrer vollständigen Scheitelflächensysteme ein und dieselbe Form haben.

I. Für die Polyeder A_n mit durchweg gleichförmigen Grenzflächen bestehen die Relationen:

$$x_h = n \text{ und } h \cdot xh = 6n - 12,$$

$$xh = \frac{12}{6-h}.$$

Die in Betracht kommenden Lösungen sind:

1) $h = 3$, $x_3 = 4$; 2) $h = 4$, $x_4 = 6$; 3) $h = 5$, $x_5 = 12$, und diesen entsprechen:

1) das Tetraeder, 2) das Tetragonhexaeder, 3) das Pentagondodekaeder.

II. Die Körper der zweiten Klasse mit doppelter Form der Grenzflächen sind definiert durch die Gleichungen:

$$i \cdot x_i = 2n - 4,\quad 2k \cdot x_{2k} = 4n - 8,\quad x_i + x_{2k} = n.$$

Es folgt:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n-2},$$

$$i \geqq 3,\quad k \geqq 2.$$

1) Setzt man $k = 2$, so ist $i = n - 2$, und man erhält für jedes beliebige n:

$$x_{n-2} = 2,\quad x_4 = n - 2.$$

Der hierdurch definierte Körper ist ein $(n - 2)$-kantiges Prisma.

2) Da die Ungleichung gilt:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{i} + \frac{1}{k} < 1,$$

so kommen nach Ausschlufs des Wertes $k = 2$ nur noch die Wertepaare in Betracht:

a) $i = 3$, $k = 3$, b) $i = 3$, $k = 4$, c) $i = 3$, $k = 5$,
d) $i = 4$, $k = 3$, e) $i = 5$, $k = 3$.

Dieselben liefern zur Bestimmung der gesuchten Polyeder folgende Daten:

a) $x_3 = 4$, $x_6 = 4$; $n = 8$ b) $x_3 = 8$, $x_8 = 6$; $n = 14$ c) $x_3 = 20$, $x_{10} = 12$; $n = 32$

d) $x_4 = 6$, $x_6 = 8$; $n = 14$ e) $x_5 = 12$, $x_6 = 20$. $n = 32$

Indem man aber die fünf Körper: a) das Tetraeder, b) das Tetragonhexaeder, c) das Pentagondodekaeder, d) das Trigonoktaeder, e) das Trigonikosaeder nach einander durch das Kappen ihrer sämtlichen Ecken in Körper zweiter Klasse überführt, erhält man offenbar die jenen fünf Bedingungen entsprechenden Polyedertypen.

3) Die gesuchten Polyeder der dritten Klasse bestimmen sich durch die Bedingungen:

$$i \cdot x_{2i} = k \cdot x_{2k} = l \cdot x_{2l} = n - 2,$$
$$x_{2i} + x_{2k} + x_{2l} = n.$$

Aus denselben ergiebt sich:

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1 + \frac{2}{n-2},$$
$$2 \leqq i < k < l.$$

Da in vorstehender Gleichung der Wert der linken Seite nur dann die Zahl 1 übersteigen kann, wenn der Nenner i genau den Wert 2 hat, so sind k und l an die Gleichung gebunden:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n-2},$$
$$3 \leqq k < l.$$

Da ferner die Werte $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ und $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ gleich resp. kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, so kommen überhaupt nur folgende zwei Annahmen in Frage:

$$\text{a) } i = 3,\ k = 4; \quad \text{b) } i = 3,\ k = 5.$$

Die erste Annahme ergiebt:

$$x_4 = 12,\ x_6 = 8,\ x_8 = 6,$$
$$n = 26;$$

die zweite liefert:

$$x_4 = 30,\ x_6 = 20,\ x_{10} = 12,$$
$$n = 62.$$

Ein Polyeder der ersten Art entsteht, wenn von einem Tetragonhexaeder, ein Körper der zweiten Art, wenn von einem Pentagondodekaeder erst mittelst dreiseitiger Schnitte die sämtlichen Ecken, dann von dem resultierenden Polyeder mittelst vierseitiger Schnitte die sämtlichen Kanten des ursprünglichen Körpers abgeschnitten werden.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Elementarerweiterungen.

§ 11. Die charakteristische Gleichung.

Als die charakteristische Gleichung eines allgemeinen Polyeders A_n bezeichne ich die aus den beiden Gleichungen

1) $x_3 + x_4 + \cdots + x_{n-1} = n,$

2) $3x_3 + 4x_4 + \cdots + (n-1)x_{n-1} = 6n - 12$

resultierende Relation:

3) $3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - \cdots - (n-7)x_{n-1} = 12.$

Dieselbe zeigt, *dafs für jedes überhaupt mögliche allgemeine Polyeder der Ausdruck*

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots$$

einen sowohl von der Anzahl der Seitenflächen als von der morphologischen Eigenart des Körpers völlig unabhängigen invarianten Zahlenwert besitzt.

Man kann die charakteristische Gleichung (3) in die beiden andern zerfällen:

3a) $3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m,$ 3b) $x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots = m,$

in welchen m eine positive ganze Zahl darstellt.

Ich fasse alle Polyeder, die zu dem nämlichen positiven ganzzahligen Lösungssysteme

$$x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_7,\ x_8,\ x_9,\ \ldots$$

der charakteristischen Gleichung gehören, als Polyeder desselben Stammes, alle Stämme, die zu der gleichen Zahl m gehören, als Stämme desselben Bereiches auf.

Die auffallende Erscheinung, dafs die charakteristische Gleichung eines allgemeinen Polyeders A_n weder die Anzahl x_6 seiner Grenzsechsecke noch die Anzahl n seiner Seitenflächen enthält, involviert die beiden Fragen:

1) *Welches ist bei einem beliebig gegebenen Polyeder die Abhängigkeit der Anzahl x_6 seiner Grenzsechsecke von den Anzahlen $x_3,\ x_4,\ \ldots$ seiner andersförmigen Grenzflächen?*

2) *Definiert jede positive ganzzahlige Lösung der charakteristischen Gleichung auch stets einen Polyederstamm?*

Die Beantwortung dieser beiden Hauptfragen bildet das Ziel der weiteren Untersuchungen.

§ 12. Einteilige Kantenpolygone.

Unter einem einteiligen oder einfachen Kantenpolygone eines allgemeinen n-flachs

$$A_n \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \cdots, \langle\alpha_n\rangle$$

verstehe ich jede Folge beliebig vieler Kanten

$$P \equiv k_1, k_2, \ldots, k_m,$$

in welcher der Endpunkt einer beliebigen Kante k_i mit dem Anfangspunkte der nächstfolgenden Kante k_{i+1}, und der Endpunkt der letzten Kante k_m mit dem Anfangspunkte der ersten Kante k_1 zusammenfällt.

Ein solches Polygon P teilt die Oberfläche S des Polyeders A_n in zwei einfach berandete Flächenstücke S_1 und S'. Jedes derselben enthält im allgemeinen einerseits Flächen, welche keine Kante mit P gemein haben, sogenannte Innenflächen, andererseits Flächen, welche eine oder mehrere Kanten von P enthalten, sogenannte Randflächen. Hat eine Randfläche mit dem Polygone P eine oder mehrere Kanten gemein, so soll sie eine zurücktretende bezw. vorgeschobene Fläche von S_1 resp. S' heifsen. Hieraus folgen zwei Darstellungen eines einteiligen Kantenpolygones P, nämlich:

1) Als Berandung der Fläche S_1,

$$P \equiv \mathfrak{p}_{1,1}, \mathfrak{p}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{1,r_1} \equiv \mathfrak{p}_{2,1}, \mathfrak{p}_{2,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{2,r_2} \equiv \mathfrak{p}_{3,1}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{p}_{i-1,r_{i-1}} \equiv \mathfrak{p}_{i,1}, \mathfrak{p}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,r_i} \equiv \mathfrak{p}_{1,1},$$
$$(r_h \gtreqless 2).$$

2) Als Berandung der Fläche S',

$$P \equiv \mathfrak{q}_{1,1}, \mathfrak{q}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{1,s_1} \equiv \mathfrak{q}_{2,1}, \mathfrak{q}_{2,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{2,s_2} \equiv \mathfrak{q}_{3,1}, \ldots$$
$$\ldots, \mathfrak{q}_{k-1,s_{k-1}} \equiv \mathfrak{q}_{k,1}, \mathfrak{q}_{k,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{k,s_k} \equiv \mathfrak{q}_{1,1},$$
$$(s_h \gtreqless 2),$$

wodurch die Punkte $\mathfrak{p}_{h,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,r_h}$ Ecken einer Randfläche $\langle\beta_h\rangle$

von S_1, durch die Punkte $\mathfrak{q}_{h,1}, \ldots, \mathfrak{q}_{h,s_h}$ Ecken einer Randfläche $\langle\gamma_h\rangle$ von S' gegeben werden.

Bezeichnet man mit b_h und c_h resp. die Anzahlen derjenigen Randflächen $\langle\beta\rangle$ und $\langle\gamma\rangle$, welche je h aufeinanderfolgende Kanten des Polygones P enthalten, so hat man für die Anzahl m der Kanten von P unmittelbar die beiden Ausdrücke:

$$1)\qquad m = b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \cdots = c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots.$$

Beachtet man ferner, dass in dem Falle einer vorgeschobenen Fläche $\langle\beta\rangle$ oder $\langle\gamma\rangle$, d. h. in den Fällen r_h, $s_h > 2$, die erste und letzte Kante des betreffenden Zuges von P gleichzeitig Kanten zweier vorgeschobenen Flächen $\langle\gamma\rangle$ oder $\langle\beta\rangle$ sind, dann erhält man:

$$2a)\ b_1 = c_3 + 2c_4 + 3c_5 + \cdots,\quad 2b)\ c_1 = b_3 + 2b_4 + 3b_5 + \cdots.$$

Aus der Kombination dieser mit den vorhergehenden Relationen folgt:

$$3)\qquad b_2 + b_3 + b_4 + \cdots = c_2 + c_3 + c_4 + \cdots.$$

Die Anzahl v_1 der vorgeschobenen Flächen von S_1 ist also gleich der Anzahl v' der vorgeschobenen Flächen von S'.

Durch die Einführung dieser Anzahl v geht die Relation (1) über in:

$$4)\qquad b_1 + c_1 + 2v = m.$$

Die Anzahl der an ein Polygon P grenzenden Flächen $\langle\alpha\rangle$ ist allemal gleich der Anzahl m seiner Kanten, jede Fläche so oft gezählt, als sie getrennte Kantenfolgen des Polygones enthält; und:

Ein Polygon P besitzt stets eine grade Anzahl, nämlich $2v$, gemeinsamer Kanten zweier vorgeschobenen Flächen $\langle\beta\rangle$ und $\langle\gamma\rangle$.

Entsprechend den zu P gehörigen m Randflächen schliefsen sich an dasselbe m *Nachbarpolygone.* Man findet ein solches, indem man beispielsweise in

$$P \equiv \mathfrak{p}_{1,1}, \mathfrak{p}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{1,r_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,r_h}, \ldots,$$
$$\mathfrak{p}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,r_i}$$

statt des Kantenzuges

$$\mathfrak{p}_{h,1},\ \mathfrak{p}_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{h,r_h}$$

den andern einführt,

$$\mathfrak{p}_{h,1},\ \mathfrak{p}_1',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_r',\ \mathfrak{p}_{h,r_h},$$

wo der Umfang der zugehörigen Grenzfläche $\langle\beta_h\rangle$ gegeben ist durch

$$\mathfrak{p}_{h,1},\ \mathfrak{p}_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{h,r_h},\ \mathfrak{p}_\nu',\ \mathfrak{p}_{\nu-1}',\ \ldots,\ \mathfrak{p}_1',\ \mathfrak{p}_{h,1}.$$

Ist daher P_1 ein mit P sich nirgends durchsetzendes zweites Kantenpolygon des Flächenstückes S_1, und beträgt μ die Anzahl der Grenzflächen $\langle\alpha\rangle$ des von beiden Polygonen berandeten Gürtels G_1, so kann man innerhalb desselben zwischen P und P_1 leicht $\mu - 1$ Polygone einschalten,

$$P,\ P_1',\ P_2',\ \ldots,\ P_{\mu-1}',\ P_1,$$

von denen jedes folgende ein *Nachbar*polygon des vorhergehenden ist.

Man wähle nun zum Polygone P_1 den Umfang einer Grenzfläche $\langle\alpha\rangle$ und bilde aus den Anzahlen f, k und e der Flächen, Kanten und Ecken von S_1 den Ausdruck:

$$f - k + e.$$

Der Wert desselben bleibt beim Übergange von P zu P_1' und ebenso bei allen folgenden Übergängen unverändert, weil bei jedem einzelnen die Anzahl der aus S_1 ausscheidenden Kanten genau um eine Einheit gröfser ist als die der ausscheidenden Ecken. Es gilt mithin:

$$5)\quad f - k + e = f_1' - k_1' + e_1' = \cdots = f_\mu' - k_\mu' + e_\mu' = 1\text{*)}.$$

Seien jetzt auf der Oberfläche S des Polyeders m Kantenpolygone

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_m$$

von der Beschaffenheit angenommen, dafs von den beiden zu irgend einem P_i gehörigen Flächenstücken S_i und S_i' das eine, etwa S_i', die übrigen $m - 1$ Polygone enthält. Mit Bezug auf die gesamte Oberfläche S gilt dann:

$$f - k + e = 2,$$

mit Bezug auf die einzelnen Bestandteile S_i aber:

---

*) C. Jordan: Recherches sur les polyèdres. Borchardts Journal Band 66, S. 36 und 86.

$$f_i - k_i + e_i = 1,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Demnach folgt für die von den m Polygonen P_i berandete m-fach zusammenhängende Fläche:

6) $$f' - k' + e' = 2 - m.$$

Unter den Polygonen P bilden die *Berührungs*polygone der das n-flach A_n *begleitenden Polyeder* eine besondere Zusammengehörigkeit. Ein m-kantiges Polygon P ist als ein Berührungspolygon charakterisiert, wenn diejenigen m Flächenwinkel der durch seine m Kanten gehenden Flächenpaare, welche das Polyeder A_n nicht enthalten, einen Raum R gemein haben. Alsdann bestimmen nämlich die aus den m Kanten von P nach einem Punkte $\mathfrak{x}$ des Raumes R geschickten m Ebenen ein dem Polyeder A_n umschriebenes Berührungs-m-seit. Da ferner das einem aufserhalb von A_n und der Ebenen α gelegenen Punkte $\mathfrak{x}$ zugehörige B.-Polygon $P_{\mathfrak{x}}$ bei stetiger Bewegung von $\mathfrak{x}$ so lange invariant bleibt, bis $\mathfrak{x}$ in eine Ebene α eintritt, mit dem Durchgange von $\mathfrak{x}$ durch eine solche, etwa durch α_1, es aber die zwischen den Berührungspunkten der aus $\mathfrak{x}$ an $\langle\alpha_1\rangle$ gezogenen zwei Tangenten liegenden Kantenfolgen des Umfanges von $\langle\alpha_1\rangle$ gegen einander austauscht, so erhellt, dafs der dem Polygone P zugehörige Raum R mit einem der Fächer zusammenfällt, in welche der unbeschränkte Raum durch die n Grenzebenen von A_n zerschnitten wird. Die Anzahl der unter den einteiligen Kantenpolygonen P von A_n enthaltenen B.-Polygone ist daher gleich der um eine Einheit verminderten Anzahl der Fächer in dem Systeme der n Ebenen α, oder gleich der Anzahl der A_n begleitenden Polyeder.

Man findet bei Voraussetzung allgemeiner Lage für die n Grenzebenen α die fragliche Anzahl:

$$n' = n - 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Variiert man unter Erhaltung des morphologischen Charakters von A_n die n Ebenen stetig, sonst aber beliebig im Raume, so bleibt das System der B.-Polygone von A_n so lange constant,

als das System der A_n begleitenden Körper seinen Bestand bewahrt. Eine Änderung in letzterem tritt nur und stets dann ein, wenn die vier Grenzebenen α_i, α_k, α_l, α_m eines begleitenden Tetraeders zu gegenseitigem Durchschnitt gelangen. Bezeichnet $\mathfrak{p}$ den Kreuzungspunkt der vier Ebenen, $\mathfrak{x}_1$ einen Punkt in dem verschwindenden Tetraeder $[R_1]_4$, $\mathfrak{x}_2$ einen Punkt in dem entstehenden Tetraeder $[R_2]_4$, und teilen die aus $\mathfrak{p}$ an die vier Flächen

$$\langle\alpha_i\rangle,\ \langle\alpha_k\rangle,\ \langle\alpha_l\rangle,\ \langle\alpha_m\rangle$$

gelegten $4 \cdot 2$ Tangenten deren gleich bezeichnete Umfänge resp. in die $4 \cdot 2$ Teile

$$\langle\alpha_i\rangle_1,\ \langle\alpha_i\rangle_2;\ \langle\alpha_k\rangle_1,\ \langle\alpha_k\rangle_2;\ \langle\alpha_l\rangle_1,\ \langle\alpha_l\rangle_2;\ \langle\alpha_m\rangle_1,\ \langle\alpha_m\rangle_2,$$

so hat man:

$$P_{\mathfrak{x}_1} \equiv \cdots,\ \langle\alpha_i\rangle_1,\ \cdots,\ \langle\alpha_k\rangle_1,\ \cdots,\ \langle\alpha_l\rangle_1,\ \cdots,\ \langle\alpha_m\rangle_1,\ \cdots,$$
$$P_{\mathfrak{x}_2} \equiv \cdots,\ \langle\alpha_i\rangle_2,\ \cdots,\ \langle\alpha_k\rangle_2,\ \cdots,\ \langle\alpha_l\rangle_2,\ \cdots,\ \langle\alpha_m\rangle_2,\ \cdots,$$

während die B.-Polygone der an das Tetraeder $[R_1]_4$ unmittelbar grenzenden 14 Fächer nicht alteriert werden.

Das System der B.-Polygone von A_n wechselt also bei jeder Kreuzung genau ein enthaltenes gegen ein nicht enthaltenes Polygon P aus.

Gesetzt, es sei von den einteiligen Kantenpolygonen P' eines $(n-1)$-flachs A_{n-1} bewiesen, dafs bei entsprechend erfolgender stetiger Variation der $n-1$ Grenzebenen α ein jedes in ein B.-Polygon übergeführt werden kann, und zwar in der Weise, dafs eine beliebige, aber bestimmte Randfläche des Polygones P' Grenzebene des zugehörigen begleitenden Körpers wird, dann ergiebt die Anwendung des in § 6 abgeleiteten Theoremes (2), betreffend die stetige Überführbarkeit isomorpher Polyeder in einander, dafs auch jedes Polygon P des n-flachs A_n, welches *nicht alle* drei-, vier- und fünfseitigen Grenzflächen des letzteren zu Randflächen besitzt, gleichfalls durch entsprechende Variationen in ein B.-Polygon dieses Körpers übergehen kann. Ist aber jede F.-Fläche von A_n zugleich Randfläche von P, so greife man irgend eine von ihnen, und zwar, um den verwickeltsten Fall zu behandeln, ein Fünfseit, etwa $\langle\alpha_n\rangle_5$, heraus. Es sind dann rücksichtlich der Lage der

fünf Seitenflächen von $\langle\alpha_n\rangle_5$ zu dem Polygone P im wesentlichen zwei Fälle zu unterscheiden:

1) Entweder liegen eine Seitenfläche $\langle\beta_1\rangle$ auf der einen und die vier übrigen $\langle\gamma_2\rangle$, $\langle\gamma_3\rangle$, $\langle\gamma_4\rangle$, $\langle\gamma_5\rangle$ auf der andern Seite von P,

2) Oder es liegen zwei Flächen $\langle\beta_1\rangle$, $\langle\beta_2\rangle$ auf der einen und die drei übrigen $\langle\gamma_3\rangle$, $\langle\gamma_4\rangle$, $\langle\gamma_5\rangle$ auf der anderen Seite.

In beiden Fällen resultieren für den Verlauf des Polygones P je zwei Möglichkeiten:

1a) $P \equiv \cdots, |\langle\beta_1\rangle, \langle\gamma_2\rangle|, |\langle\beta_1\rangle, \langle\alpha_n\rangle|, |\langle\beta_1\rangle, \langle\gamma_5\rangle|, \cdots,$

1b) $P \equiv \cdots, |\langle\beta_1\rangle, \langle\gamma_2\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_2\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_3\rangle|,$
$|\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_4\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_5\rangle|, |\langle\beta_1\rangle, \langle\gamma_5\rangle|, \cdots,$

2a) $P \equiv \cdots, |\langle\beta_1\rangle, \langle\gamma_5\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\beta_1\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\beta_2\rangle|,$
$|\langle\beta_2\rangle, \langle\gamma_3\rangle|, \cdots,$

2b) $P \equiv \cdots, |\langle\beta_1\rangle, \langle\gamma_5\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_5\rangle|, |\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_4\rangle|,$
$|\langle\alpha_n\rangle, \langle\gamma_3\rangle|, |\langle\beta_2\rangle, \langle\gamma_3\rangle|, \cdots.$

Nun kann man gemäſs den Ausführungen des § 6 das Polyeder A_n sich selbst isomorph stets so stetig variieren, daſs das durch die Ebene α_n von dem $(n-1)$-flach A_{n-1} abgeschnittene Hexaeder in den Fällen 1a) und 1b) von der Ebene β_1, in den Fällen 2a) und 2b) von der Ebene γ_4 in einem Fünfseit begrenzt wird. Dann giebt es in dem jeweiligen Fünfseit genau zwei die Fläche $\langle\alpha_n\rangle$ nicht schneidende Kanten, welche, statt der bezüglichen Kanten von $\langle\alpha_n\rangle$ in das Polygon P eingeführt, dieses in ein einteiliges Kantenpolygon P' des $(n-1)$-flachs A_{n-1} verwandeln. Indem man jetzt letzteres so variiert, daſs P' B.-Polygon wird, und daſs β_1 resp. γ_4 in eine Grenzebene des zugehörigen begleitenden Polyeders R übergeht, so wird man die betreffende Ebene vermöge einer entsprechenden, genügend kleinen Drehung um eine, weder das Polyeder A_{n-1} noch den begleitenden Raum R schneidende Gerade in eine Lage der Ebene α_n bringen, in welcher sie den Raum R in zwei Räume R_1 und R_2 teilt, sodaſs denselben in dem einen Falle die B.-Polygone 1a) und 1b), in dem andern die B.-Polygone 2a) und 2b) zugehören.

Hierdurch ist gezeigt, daſs mit dem Beweise der anfangs

über das Verhalten der Polygone P' eines $(n-1)$-flachs A_{n-1} ausgesprochenen Behauptung auch der Beweis für das analoge Verhalten der Polygone P eines n-flachs A_n gegeben ist.

Es sind aber die einteiligen Kantenpolygone P eines Tetraeders A_4 gegeben:

1) durch die Umfänge der vier Grenzdreiseite

$$\langle\alpha_1\rangle_3,\ \langle\alpha_2\rangle_3,\ \langle\alpha_3\rangle_3,\ \langle\alpha_4\rangle_3,$$

2) durch die drei windschiefen Vierseite

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ |\alpha_1, \alpha_2|,\ |\alpha_2, \alpha_3|,\ |\alpha_3, \alpha_4|,\ |\alpha_4, \alpha_1|,\\
&\text{b)}\ |\alpha_1, \alpha_4|,\ |\alpha_4, \alpha_2|,\ |\alpha_2, \alpha_3|,\ |\alpha_3, \alpha_1|,\\
&\text{c)}\ |\alpha_1, \alpha_3|,\ |\alpha_3, \alpha_4|,\ |\alpha_4, \alpha_2|,\ |\alpha_2, \alpha_1|,
\end{aligned}$$

und diese sieben Polygone sind identisch mit den B.-Polygonen der A_4 begleitenden sieben Körper:

1) mit den vier das Tetraeder gleichzeitig seitenden und scheitelnden Vierflachen,

2) mit den drei A_4 doppelt kantenden Tetraedern.

Es resultiert mithin der Satz:

Theorem 4. *Jedes einteilige Kantenpolygon P eines allgemeinen Polyeders A_n kann durch stetige Variation desselben in das B.-Polygon eines begleitenden Körpers übergeführt werden.*

Die Anzahl der Polygone P eines Polyeders A_n ist im Gegensatz zu der Zahl seiner B.-Polygone keine Invariante von n. Sind nämlich $\langle\alpha_k\rangle$, $\langle\alpha_l\rangle$ die Seitenflächen und $\langle\alpha_i\rangle$, $\langle\alpha_m\rangle$ die Scheitelflächen eines Kreuzungsvierflachs von A_n, und bezeichnet $(k, l)_1$ die Anzahl derjenigen Polygone P, welche sowohl durch die Kanten $|\alpha_i, \alpha_k|$ und $|\alpha_i, \alpha_l|$ als durch die Kanten $|\alpha_m, \alpha_k|$ und $|\alpha_m, \alpha_l|$ gehen, $(k, l)_2$ aber die Anzahl derjenigen Polygonenpaare, von denen das eine die Kanten $|\alpha_i, \alpha_k|$ und $|\alpha_i, \alpha_l|$, das andere die Kanten $|\alpha_m, \alpha_k|$ und $|\alpha_m, \alpha_l|$ enthält, ohne dafs beide eine Kante gemein haben, so besteht zwischen den Anzahlen φ und φ' der vor und der nach Kreuzung von $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m$ vorhandenen Polygone P die Relation:

$$\varphi' = \varphi - (k, l)_1 + (k, l)_2.$$

Beispielsweise bestimmt man für die beiden Formen des Hexaeders:

$$\varphi = 26, \quad \varphi' = 28,$$

während die Anzahl der B.-Polygone in beiden Fällen 25 beträgt.

Die Berechnung der Anzahl φ läfst sich in jedem gegebenen Falle aus einer F.-Construction des betreffenden Polyeders zwar ohne principielle Schwierigkeiten, aber meistenteils nur mittelst weitläufiger Rechnungen ausführen.

§ 13. Isomorphe Kantenpolygone.

Ein beliebig im Raume gegebenes geradliniges Polygon

$$P \equiv k_1, k_2, \cdots, k_m$$

kann als Kantenpolygon eines convexen Polyeders aufgefafst werden, wenn jede durch zwei oder mehrere aufeinanderfolgende Kanten gehende Ebene alle übrigen Kanten auf ein und derselben Seite liegen hat.

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{p}$ einen mit dem Polygone P auf derselben Seite der Ebene $[k_m, k_1]$ gelegenen Punkt, dessen endliche Verbindungsstrecke mit der Ecke (k_m, k_1) von keiner Ebene $[k_i, k_{i+1}]$ geschnitten wird, so kann auch die aus $\mathfrak{p}$ nach irgend einem Punkte $\mathfrak{x}$ einer Kante gezogene endliche Strecke $|\mathfrak{p}, \mathfrak{x}|$ von keiner Ebene $[k_i, k_{i+1}]$ getroffen werden. Eine solche Ebene müfste sonst auch die endliche Verbindungsstrecke $|\mathfrak{x}, (k_m, k_1)|$ und weiter mindestens je eine Kante der beiden von (k_m, k_1) nach $\mathfrak{x}$ führenden Kantenfolgen schneiden. Ein veränderlicher Punkt kann also von $\mathfrak{p}$ aus stetig in jede Kante des Polygones eintreten, ohne eine der Ebenen $[k_i, k_{i+1}]$ zu passieren. Besagte Ebenen begrenzen daher ein und dasselbe convexe Polyeder, und P stellt ein auf dessen Oberfläche gezogenes Polygon dar.

Enthält P ebene Kantenzüge mit mehr als zwei Kanten, d. h. ebene Züge der Form

$$k_i, k_{i+1}, \ldots, k_k,$$

so hat man, um es als Kantenpolygon darzustellen, durch jede Kante

$$k_{i+1}, \ldots, k_{k-1}$$

noch eine zweite Ebene zu legen, so dafs diese Ebenen zusammen mit den früheren wiederum ein einziges Polyeder begrenzen.

Zwei Kantenpolygone P und P' heifsen isomorph, wenn einer zu P gehörigen umläufigen Kantenfolge

$$P \equiv k_1, k_2, \ldots, k_m$$

eine zu P' gehörige umläufige Kantenfolge

$$P' \equiv k_1', k_2', \ldots, k_m'$$

von der Beschaffenheit entspricht, dafs je drei in einer Ebene liegenden Kanten

$$k_{i-1}, k_i, k_{i+1}$$

je drei in einer Ebene liegende Kanten

$$k'_{i-1}, k'_i, k'_{i+1}$$

zugeordnet sind.

Entsprechend dem in § 6 aufgestellten Theoreme 2 gilt der Satz:

Theorem 5. *Zwei isomorphe Kantenpolygone P und P' können unter Erhaltung ihres morphologischen Charakters stets stetig in einander übergeführt werden.*

Da, wie ein Schlufs von n auf $n+1$ sogleich zeigt, der Satz für zwei isomorphe convexe ebene Polygone statthat, reicht es hin, denselben für die reducierten, d. h. für diejenigen Polygone P_1 und P_1' zu beweisen, welche aus P und P' entstehen, wenn man in je zwei entsprechenden ebenen Kantenzügen

$$k_i, k_{i+1}, \ldots, k_k \quad \text{und} \quad k'_i, k'_{i+1}, \ldots, k'_k$$

nur die bis zu ihren Durchschnitten verlängerten Endkanten auffafst. Die resultierenden reducierten Polygone

$$P_1 \equiv \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{2\mu} \quad \text{und} \quad P_1' \equiv \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda'_{2\mu}$$

als Kantenpolygone der Polyeder

$$A_{2\mu} \equiv [\lambda_1, \lambda_2], \ [\lambda_2, \lambda_3], \ldots, \ [\lambda_{2\mu}, \lambda_1] \quad \text{und}$$
$$A'_{2\mu} \equiv [\lambda_1', \lambda_2'], \ [\lambda_2', \lambda_3'], \ldots, \ [\lambda'_{2\mu}, \lambda_1']$$

teilen deren Oberflächen S, S' in je zwei getrennte Bestandteile,

$$S = S_1 + S_2, \quad S' = S_1' + S_2'.$$

Der Kürze halber seien die den Ebenen

$$[\lambda_1, \lambda_2], \ [\lambda_3, \lambda_4], \ldots, [\lambda_{2\mu-1}, \lambda_{2\mu}] \quad \text{und}$$
$$[\lambda_1', \lambda_2'], \ [\lambda_3', \lambda_4'], \ldots, [\lambda_{2\mu-1}', \lambda_{2\mu}']$$

zugehörigen Grenzpolygone der Flächen S_1 und S_1' bezeichnet durch resp.

$$\langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \ldots, \langle\alpha_{2\mu-1}\rangle \quad \text{und} \quad \langle\alpha_1'\rangle, \langle\alpha_3'\rangle, \ldots, \langle\alpha_{2\mu-1}'\rangle,$$

analog die Grenzflächen der Bestandteile S_2 und S_2' durch resp.

$$\langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \ldots, \langle\alpha_{2\mu}\rangle \quad \text{und} \quad \langle\alpha_2'\rangle, \langle\alpha_4'\rangle, \ldots, \langle\alpha_{2\mu}'\rangle.$$

Dies festgesetzt kann man den Ausführungen des § 5 zufolge die beiden Polyeder $A_{2\mu}$, $A_{2\mu}'$ unter Erhaltung der beiden Polygone P_1, P_1' so stetig im Raume variieren, dafs durch Kreuzungen entsprechender Ebenenquadrupel die etwa zwischen den Kanten

$$|\alpha_3, \alpha_1| \quad \text{und} \quad |\alpha_3, \alpha_5|, \quad |\alpha_3', \alpha_1'| \quad \text{und} \quad |\alpha_3', \alpha_5'|$$

gelegenen Seiten der Grenzflächen $\langle\alpha_3\rangle$, $\langle\alpha_3'\rangle$ aus deren Begrenzungen ausscheiden. Indem man dann weiter ganz ebenso die etwa zwischen den Kanten

$$|\alpha_5, \alpha_1| \quad \text{und} \quad |\alpha_5, \alpha_7|, \quad |\alpha_5', \alpha_1'| \quad \text{und} \quad |\alpha_5', \alpha_7'|$$

gelegenen Seiten der Grenzflächen $\langle\alpha_5\rangle$, $\langle\alpha_5'\rangle$ aus deren Umfängen ausscheidet, und successive die Flächen

$$\langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_9\rangle, \ldots, \langle\alpha_{2\mu-3}\rangle \quad \text{und} \quad \langle\alpha_7'\rangle, \langle\alpha_9'\rangle, \ldots, \langle\alpha_{2\mu-3}'\rangle$$

auf entsprechende Weise behandelt, bringt man die Bestandteile S_1, S_1' nach und nach auf die Gestalt:

$$\langle\alpha_1\rangle_{\mu+1} | : \langle\alpha_3\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_5, \langle\alpha_7\rangle_5, \ldots, \langle\alpha_{2\mu-3}\rangle_5, \langle\alpha_{2\mu-1}\rangle_4 \equiv \overline{S}_1$$
$$\langle\alpha_1'\rangle_{\mu+1} | : \langle\alpha_3'\rangle_4, \langle\alpha_5'\rangle_5, \langle\alpha_7'\rangle_5, \ldots, \langle\alpha_{2\mu-3}'\rangle_5, \langle\alpha_{2\mu-1}'\rangle_4 \equiv \overline{S}_1'.$$

Unter Festhaltung des morphologischen Charakters der so gewonnenen Flächen $\overline{S}_1$ und $\overline{S}_1'$ lassen sich die ihrer Gestalt nach bisher unveränderten Bestandteile S_2 und S_2' durch ganz gleichartige Processe in die einander isomorphen Flächen $\overline{S}_2$ und $\overline{S}_2'$ überführen.

Demnach können die beiden ursprünglichen Polyeder unter Bewahrung des Charakters der Polygone P_1 und P_1' durch stetige Variationen in zwei isomorphe Körper, und diese gemäfs dem in § 6 aufgestellten Theoreme 2 sich selbst isomorph

stetig zur Deckung gebracht werden. Dadurch gelangen aber auch die Polygone P_1 und P_1' in der vorgeschriebenen Weise zur Coincidenz.

Als unmittelbare Ergänzung des Theoremes 5 bietet sich der Satz:

Ist ein Polygon P_1' isomorph dem Randpolygone P_1 einer Fläche S_1, so kann dasselbe sich selbst isomorph stets so stetig variiert werden, dafs es das Randpolygon einer zu S_1 isomorphen Fläche S_1' wird.

Durch m-malige Anwendung dieses Satzes findet man allgemein:

Theorem 6. *Ist eine m-fach berandete allgemein polyedrische Fläche gegeben,*

$$F_m \equiv P_1', P_2', \ldots, P_m',$$

deren m Randpolygone resp. den Randpolygonen

$$P_1, P_2, \ldots, P_m$$

von m isolierten Flächen

$$S_1, S_2, \ldots, S_m$$

entsprechend isomorph sind, so kann dieselbe stets sich selbst isomorph so stetig im Raume variiert werden, dafs sie durch m den Flächen

$$S_1, S_2, \ldots, S_m$$

isomorphen Flächen

$$S_1', S_2', \ldots, S_m'$$

zu einem allgemeinen convexen Polyeder geschlossen wird.

§ 14. Enthaltene und enthaltende Polyeder.

Ein auf der Oberfläche S eines Polyeders beliebig gewähltes System von Polygonen P teilt dieselbe in eine bestimmte Anzahl einander ausschliefsender d. i. sich gegenseitig nirgends überdeckender Stücke

$$S_1, S_2, \ldots, S_m.$$

Die Berandung R_i eines solchen einteiligen Bestandteiles S_i von S wird im allgemeinen aus mehreren in keiner Kante einander durchsetzenden Polygonen $P_i^{(h)}$ $(h = 1, 2, \cdots)$ bestehen. Ist nun der durch diese Polygone vermittelte gegen-

seitige Zusammenhang der Bestandteile $S_1, S_2, \ldots$ von der Beschaffenheit, dafs ihre sämtlichen Randkanten und nur diese von dem Polyeder A_n mittelst eines Systemes neu einzuführender Grenzflächen $\langle\alpha_{n+\nu}\rangle$ abgeschnitten werden können, welches die Formen der Randflächen nicht alteriert, *so soll das System der P als ein Erweiterungsnetz der Oberfläche S aufgefafst werden.*

Es erfüllen die Polygone P bezw. die ihnen äquivalenten Polygone $P^{(h)}$ die Bedingungen eines Erweiterungsnetzes allemal dann und nur dann, wenn entweder jeder Bestandteil S_i mindestens drei Flächen $\langle\alpha\rangle$ enthält, oder wenn, falls Bestandteile mit einer resp. mit zwei sich seitenden Flächen vorhanden sind, der einen solchen Bestandteil umgebende Flächengürtel sich nicht über einen einzigen sondern über verschiedene Bestandteile S_i erstreckt. Diese Einschränkungen sind notwendig, weil die Form eines ein- bezw. eines zweiflächigen Bestandteiles durch die Berandung des angrenzenden Gürtels bereits unzweideutig bestimmt, und mithin eine Einschaltung von Zwischenflächen so lange ausgeschlossen ist, als der Gürtel erhalten bleibt. Hat aber das System der P die angegebenen Eigenschaften, so kann man längs des Netzes ein System von Zwischenflächen unter anderem mittelst des folgenden stets anwendbaren Verfahrens einschalten:

Man fasse irgend einen Bestandteil S_1 nebst seinem supplementären $S - S_1$ auf und construiere auf den an das Randpolygon

$$P_1 \equiv \mathfrak{p}_{1,1}, \mathfrak{p}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{1,r_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,r_h}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,1}, \mathfrak{p}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,r_i}$$

$$\equiv \mathfrak{q}_{1,1}, \mathfrak{q}_{1,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{1,s_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{h,1}, \mathfrak{q}_{h,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{h,s_h}, \ldots, \mathfrak{q}_{k,1}, \mathfrak{q}_{k,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{k,s_k} \equiv Q_1$$

grenzenden zwei Flächenstreifen

$$\langle\beta_1\rangle, \cdots, \langle\beta_h\rangle, \cdots, \langle\beta_i\rangle,$$
$$\langle\gamma_1\rangle, \cdots, \langle\gamma_h\rangle, \cdots, \langle\gamma_k\rangle$$

zwei dem Polygone $P_1 \equiv Q_1$ isomorphe Polygone:

$$P_1' \equiv \mathfrak{p}'_{1,1},\ \mathfrak{p}'_{1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{1,r_1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{h,1},\ \mathfrak{p}'_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{h,r_h},\ \ldots,$$
$$\mathfrak{p}'_{i,1},\ \mathfrak{p}'_{i,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{i,r_i}$$
$$\equiv \mathfrak{q}'_{1,1},\ \mathfrak{q}'_{1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}'_{1,s_1},\ \ldots,\ \mathfrak{q}'_{h,1},\ \mathfrak{q}'_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}'_{h,s_h},\ \ldots,$$
$$\mathfrak{q}'_{k,1},\ \mathfrak{q}'_{k,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}'_{k,s_k} \equiv Q_1'$$

und

$$P_1'' \equiv \mathfrak{p}''_{1,1},\ \mathfrak{p}''_{1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}''_{1,r_1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}''_{h,1},\ \mathfrak{p}''_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}''_{h,r_h},\ \ldots,$$
$$\mathfrak{p}''_{i,1},\ \mathfrak{p}''_{i,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}''_{i,r_i}$$
$$\equiv \mathfrak{q}''_{1,1},\ \mathfrak{q}''_{1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}''_{1,s_1},\ \ldots,\ \mathfrak{q}''_{h,1},\ \mathfrak{q}''_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}''_{h,s_h},\ \ldots,$$
$$\mathfrak{q}''_{k,1},\ \mathfrak{q}''_{k,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}''_{k,s_k} \equiv Q_1''.$$

Bestimmt man dabei die gegenseitige Lage der beiden Polygone P_1' und P_1'' in der Weise, dafs einerseits der Schnitt der Ebene β_h'' des dem ebenen Kantenzuge

$$\mathfrak{p}_{h,1},\ \mathfrak{p}_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{h,r_h}$$

auf $S - S_1$ entsprechenden Zuges

$$\mathfrak{p}''_{h,1},\ \mathfrak{p}''_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}''_{h,r_h}$$

mit der Ebene β_h zwischen den Kantenzug

$$\mathfrak{p}'_{h,1},\ \mathfrak{p}'_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{h,r_h}$$

und die Strecke $|\mathfrak{p}_{h,1},\ \mathfrak{p}_{h,r_h}|$, andererseits der Schnitt der Ebene γ_h' des dem Kantenzuge

$$\mathfrak{q}_{h,1},\ \mathfrak{q}_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{h,s_h}$$

auf S_1 entsprechenden Zuges

$$\mathfrak{q}'_{h,1},\ \mathfrak{q}'_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}'_{h,s_h}$$

mit der Ebene γ_h zwischen den Kantenzug

$$\mathfrak{q}''_{h,1},\ \mathfrak{q}''_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}''_{h,s_h}$$

und die Strecke $|\mathfrak{q}_{h,1},\ \mathfrak{q}_{h,s_h}|$ fällt, legt alsdann durch die einzelnen Kanten der Züge

$$\mathfrak{p}'_{h,1},\ \mathfrak{p}'_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}'_{h,r_h} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}''_{h,1},\ \mathfrak{q}''_{h,2},\ \ldots,\ \mathfrak{q}''_{h,s_h}$$

gleichfalls Ebenen, so kann man immer bewirken, dafs das System der durch die Kanten der Polygone P_1' und P_1'' ge-

legten Ebenen von dem Polyeder A_n genau das Kantenpolygon P_1 abschneidet, und dafs es zusammen mit den Bestandteilen S_1' und S_1''*) ein von höchstens $n+\nu$ Flächen begrenztes Polyeder $A_{n+\nu}$ bestimmt.

Da das Polygon P_1'' von dem Flächenstücke $S-S_1$ ein demselben genau isomorphes Stück abschneidet, kann man weiter einen an P_1'' grenzenden Bestandteil von dem Flächentypus S_2 herausgreifen und zwischen ihn und den supplementären durch eine der vorherigen ähnliche Construction einen zweiten Flächengürtel einschalten, u. s. w. Man erhält durch m-malige Wiederholung dieses Verfahrens aus A_n ein Polyeder $A_{n+\nu'}$, welches die m Bestandteile S_i bezw. m ihnen isomorphe in durchaus getrennten Lagen enthält.

Die vorstehende Construction kann auf die mannigfaltigsten Arten variiert werden. So kann man einmal derselben eine andere Anordnung der Polygone $P^{(h)}$ zu Grunde legen, oder man kann innerhalb des Netzes der $P^{(h)}$ ein neues Polygon P bestimmen, längs dieses zunächst einen Flächengürtel einschalten und dann die von dessen Rändern eingeschlossenen Flächenstücke der ersten Operation unterwerfen, oder man kann die Isolierungen der Bestandteile S_i, sei es für die Oberfläche S selbst, sei es auch nur für ein aus mehreren S_i zusammengesetztes, einfach berandetes Flächenstück derselben, gleichzeitig ausführen, u. s. w., u. s. w.

Um für den letzten Fall ein Beispiel zu geben, wähle man auf A_n $n-1$ unabhängige, d. h. solche Polygone P, deren jedes mindestens eine den übrigen nicht zugehörige Kante besitzt. Dieselben teilen die Oberfläche S in n Bestandteile $S_i \equiv \langle \alpha_i \rangle$. Construiert man innerhalb jeder Grenzfläche $\langle \alpha_i \rangle_{m_i}$ ein isomorphes Polygon $\langle \alpha_i' \rangle_{m_i}$ und legt durch dessen Seiten m_i Ebenen, welche von A_n nur die sämtlichen Kanten der Fläche $\langle \alpha_i \rangle$ und keine Ecke einer Fläche $\langle \alpha_k' \rangle$ abschneiden, so bestimmen alle diese Ebenen mit den n Ebenen $\langle \alpha_i \rangle$ zusammen ein allgemeines Polyeder A_{7n-12} mit den n isolierten Flächen $\langle \alpha_i' \rangle_{m_i}$.

---

*) Es bezeichnen S_1' und S_1'' die von den Polygonen P_1' und P_1'' berandeten, den Bestandteilen S_1 und $S-S_1$ isomorphen Flächenstücke.

Die allgemeinste zu einem gegebenen Erweiterungsnetz

$$N_m \equiv P_1, P_2, \ldots, P_m$$

gehörige Einschaltungsfläche wird durch eine aus ebenen Polygonen $\langle\alpha\rangle$ zusammengesetzte m-fach berandete Fläche F_m dargestellt,

$$F_m \equiv P_1', P_2', \ldots, P_m',$$

deren m Randpolygone P_i' resp. den m Polygonen P_i isomorph sind.

In der Folge soll das Polyeder A_n als ein in jedem abgeleiteten Polyeder $A_{n+\nu}$ „enthaltenes", letzteres als „enthaltendes" Polyeder bezeichnet werden.

Zu jedem Polyeder A_n ($n = 4, 5, 6, \ldots$) existieren offenbar so viele enthaltende Polyeder $A_{n+\nu}$, als man haben will. Umgekehrt fragt es sich, unter welchen Bedingungen ein gegebenes Polyeder A_n selbst enthaltendes Polyeder eines oder mehrerer in ihm enthaltener Polyeder $A_{n-\nu}$ ist.

Daſs es in der That *im allgemeinsten Sinne irreducibele*, d. h. nichtenthaltende Polyeder giebt, beweisen das Tetraeder, das Pentaeder, die beiden Formen des Hexaeders und die fünf Formen des Heptaeders. Damit ein Polyeder A_n *reducibel oder enthaltend sei*, ist es notwendig und hinreichend, daſs auf seiner Oberfläche eine einteilige m-fach berandete Fläche F_m existiert, deren $m \gtreqless 2$ Randpolygone P_h folgende Eigenschaften besitzen: Dieselben müssen sich so in einzelne getrennte Stücke (Kantenfolgen) zerlegen lassen,

$$P_h \equiv l_{h,1} + l_{h,2} + \cdots + l_{h,h-1} + l_{h,h+1} + \cdots + l_{h,m},$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m)$$

— jedes Polygon P_h mit Bezug auf den eingeschlossenen Bestandteil S_h in positivem Sinne durchlaufen — daſs erstens je zwei Kantenfolgen $\pm l_{i,k}$*) und $\mp l_{k,i}$ entsprechend isomorph sind, daſs zweitens in P_i und P_k auf die Züge $+ l_{i,k}$ und $- l_{k,i}$ resp. zwei Züge $+ l_{i,k'}$ und $- l_{k,k'}$ folgen, und daſs drittens in $P_{k'}$ an den Zug $+ l_{k',i}$ sich der Zug $+ l_{k',k}$ schlieſst. Alsdann folgt nämlich aus den Theoremen 5 und 6 des vorigen Paragraphen,

---

*) Durch die Vorzeichen sollen die Richtungen der Kantenzüge angedeutet werden.

dafs die m Flächen S_i resp. m ihnen isomorphe Flächen sich stets zu der vollständigen Oberfläche eines Polyeders zusammensetzen lassen.

Ist für ein beliebiges Polyeder irgend ein Erweiterungsnetz nebst einem zugehörigen Einschaltungssysteme gegeben, und bezeichnet x_h die Anzahl der h-seitigen Grenzflächen des gegebenen Körpers, y_h die Anzahl der h-seitigen Grenzflächen des Einschaltungssystemes, so ergiebt sich aus den charakteristischen Gleichungen des gegebenen und des abgeleiteten Polyeders, d. h. aus den Gleichungen

$$1)\qquad 3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - \cdots = 12,$$

$$2)\qquad 3(x_3 + y_3) + 2(x_4 + y_4) + (x_5 + y_5) - (x_7 + y_7) - 2(x_8 + y_8) - \cdots = 12$$

für die Anzahlen y_h die Bedingungsgleichung:

$$3)\qquad 3y_3 + 2y_4 + y_5 - y_7 - 2y_8 - \cdots = 0.$$

Diese Beziehung giebt ein Mittel an die Hand, um ein gegebenes Polyeder A_n auf seine Reducibilität hin zu prüfen und successive die in ihm etwa enthaltenen Polyeder zu bestimmen.

Das einfachste in Frage kommende Lösungssystem der Gleichung (3) ist gegeben durch:

$$y_3 = y_4 = y_5 = y_7 = y_8 = \cdots = 0.$$

Dasselbe definiert ein ausschliefslich aus sechsseitigen Grenzflächen bestehendes Einschaltungssystem.

Die Polyeder des Bereiches B_0, d. h. die Polyeder, welche definiert werden durch die Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = 0,$$

können, wenn überhaupt, nur Einschaltungssysteme dieser speciellen Art enthalten.

Jede Erweiterung eines gegebenen Polyeders zu einem enthaltenden Polyeder, bei welcher das hinzutretende Flächensystem nur Grenzsechsseite enthält, soll eine Elementarerweiterung, das Erweiterungsnetz, längs dessen sie vollzogen wird, aber ein Elementarnetz heifsen.

§ 15. Elementarpolygone und Elementargürtel.

Die einfachste Form der Elementarerweiterung eines gegebenen Polyeders A_n zu einem enthaltenden Polyeder A_{n+m} besteht in der Spaltung desselben längs eines auf ihm vorhandenen Elementarpolygones P in zwei Bestandteile S_1, S_2 und in der Verbindung der freien Berandungen letzterer durch einen zu jenem Elementarpolygone gehörigen, d. h. von zwei demselben isomorphen Polygonen berandeten Elementargürtel $G\langle 6\rangle$.

Die zwischen den dem Polygone P isomorphen Randpolygonen R_1 und R_2 der Bestandteile S_1 und S_2 eingeschalteten m Flächen $\langle\alpha_{n+h}\rangle_6$ des Gürtels $G\langle 6\rangle$ können dann zweckmäfsig — und zwar auf doppelte Weise — in ein System von Elementarstreifen geordnet werden. Das eine System erhält man, indem man die an das Polygon R_1 grenzenden Flächen

$$\langle\alpha_{n+1}\rangle_6,\ \langle\alpha_{n+2}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_{n_1}\rangle_6$$

zu dem Elementarstreifen S_1', die an den freien Rand R_1' desselben grenzenden Flächen

$$\langle\alpha_{n_1+1}\rangle_6,\ \langle\alpha_{n_1+2}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_{n_2}\rangle_6$$

zu dem Elementarstreifen S_1'', u. s. w. rechnet, das zweite, indem man die an das Polygon R_2 sich anschliefsenden Flächen

$$\langle\alpha'_{n+1}\rangle_6,\ \langle\alpha'_{n+2}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha'_{n_1'}\rangle_6$$

zum Elementarstreifen S_2', die an den freien Rand R_2' desselben sich anschliefsenden Flächen

$$\langle\alpha'_{n'+1}\rangle_6,\ \langle\alpha'_{n_1'+2}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha'_{n_2'}\rangle_6$$

zum Elementarstreifen S_2'', u. s. w. zusammenfafst. Jedes dieser beiden Systeme wird entsprechend dem morphologischen Charakter der Randpolygone R_1, R_2 im allgemeinen aus einer bestimmten Anzahl r_1, r_2 vollständiger, d. h. geschlossener, und einer bestimmten Anzahl ϱ_1, ϱ_2 unvollständiger, d. h. ein- oder mehrfach unterbrochener Streifen bestehen. Die Grenze zwischen beiden Gebieten wird durch dasjenige Polygon $R^{(r_1)}$, $R^{(r_2)}$ gegeben, welches unter seinen Kanten solche von R_2, R_1 enthält.

Ich behaupte nun, *dafs, wie auch der Gürtel G beschaffen sei, allemal die beiden Beziehungen gelten:*

$$1)\ r_1 = r_2, \quad 2)\ \varrho_1 = \varrho_2.$$

Zum Beweise der ersten Gleichung bemerke man, dafs der an R_2 grenzende Streifen S_2' mindestens eine Fläche $\langle \alpha_{n+h} \rangle_6$ des Streifens $S_1^{(r_1)}$, aber keine einzige Fläche des benachbarten Streifens $S_1^{(r_1-1)}$ enthält. Es folgt, dafs der Streifen S_2'' mindestens eine Fläche des Streifens $S_1^{(r_1-1)}$, aber keine Fläche des Streifens $S_1^{(r_1-2)}$ enthält, u. s. w., dafs schliefslich der Streifen $S_2^{(r_1-1)}$ *keine*, der Streifen $S_2^{(r_1)}$ *mindestens eine* Fläche des Streifens S_1' aufweist. Der nächstfolgende Streifen $S_2^{(r_1+1)}$ ist daher notwendig der erste unvollständige Streifen. Daraus folgt aber, wie behauptet,

$$1) \qquad r_2 = r_1.$$

Um die zweite Beziehung zu bestätigen, denke man sich zwischen den Gürtel G und den Bestandteil S_2 nach einander $1 + \left[\frac{\varrho_1}{r_1}\right]$ dem G isomorphe Gürtel $G_1, G_2, \ldots$ eingefügt. Man kann mit nur unwesentlicher Einschränkung der anzuwendenden Schlufsweisen die Annahme machen, dafs $r_1 > \varrho_1$, also $\left[\frac{\varrho_1}{r_1}\right] = 0$ ist. Es liegt dann der Gürtel

$$G \equiv S_2' + S_2'' + \cdots + S_2^{(r_1)} + \Sigma_2^{(r_1+1)} + \cdots + \Sigma_2^{(r_1+\varrho_2)}$$

ganz in dem Gebiete der $2r_1$ vollständigen Elementarstreifen

$$S_1', S_1'', \ldots, S_1^{(r_1)}, S_1^{(r_1+1)}, \ldots, S_1^{(2r_1)}.$$

Folglich fallen die Flächen des Streifens S_2' auf die $1 + \varrho_1$ Streifen

$$S_1^{(r_1+\varrho_1)}, S_1^{(r_1+\varrho_1-1)}, \ldots, S_1^{(r_1)},$$

die Flächen des Streifens S_2'' auf die $1 + \varrho_1$ Streifen

$$S_1^{(r_1+\varrho_1-1)}, S_1^{(r_1+\varrho_1-2)}, \ldots, S_1^{(r_1-1)},$$

schliefslich die Flächen des Streifens $\Sigma_2^{(r_1+\varrho_2)}$ auf die $1 + \varrho_1$ Streifen

$$S_1^{(\varrho_1-\varrho_2+1)}, S_1^{(\varrho_1-\varrho_2)}, \ldots, S_1^{(-\varrho_2+1)}.$$

Nach Voraussetzung gehört aber mindestens eine Fläche des Streifens $\Sigma_2^{(r_1+\varrho_2)}$ noch zu dem Streifen S_1', also gilt

$$2a) \qquad \varrho_1 \geqq \varrho_2.$$

Indem man jetzt mit Bezug auf das Polyeder A_{n+m} den Gürtel G, statt zwischen G und S_2 zwischen G und S_1 einschaltet, so beweist man ganz ebenso die Ungleichung:

2b) $$\varrho_2 \overline{\overline{>}} \varrho_1.$$

Mithin resultiert in der That:

2) $$\varrho_1 = \varrho_2.$$

Zufolge der hiermit bewiesenen Relation

$$r_1 + \varrho_1 = \gamma = r_2 + \varrho_2$$

definiere ich die Gröſse γ als die Amplitude des Elementargürtels G.

Es zerfallen die Polygone P des Elementargürtels G in zwei wesentlich verschiedene Kategorien:

1) In solche Polygone $\overline{P}$, welche den Gürtel G in ein einfach, nämlich von $\overline{P}$ berandetes Flächenstück F' und ein im allgemeinen dreifach, nämlich von $\overline{P}$, R_1 und R_2 berandetes Stück F''' zerschneiden, und

2) in solche Polygone P_1, welche den Gürtel G in zwei zweifach, nämlich von P_1, R_1 und von P_1, R_2 berandete Stücke G_1 und G_2 zerteilen.

Da das von einem Polygone $\overline{P}$ umsäumte Flächenstück F' sich lediglich aus Grenzsechsecken $\langle\alpha_{n+h}\rangle_6$ zusammensetzt, so wird es seiner Construction nach schon durch das Polygon $\overline{P}$ unzweideutig bestimmt. Es kann daher weder ein dem Polygone $\overline{P}$ isomorphes noch überhaupt zwei einander nicht schneidende isomorphe Polygone enthalten. Keines seiner Polygone P kann daher Elementarpolygon sein.

Faſst man dagegen ein Polygon P_1 ins Auge und erweitert den Gürtel G durch zweckmäſsige Ansetzung neuer Grenzsechsecke an seinen Rand R_2 über diesen hinaus um einen dem Gürtel $G_1 \equiv (R_1, P_1)$ isomorphen Gürtel $G_1' \equiv (R_2, P_2)$, so schlieſsen die einander isomorphen Polygone P_1 und P_2 einen gleichfalls aus m Grenzsechsecken $\langle\alpha_{n+h}\rangle_6$ bestehenden Gürtel G_1' ein. Jedes auf G gezogene Polygon P_1 ist daher selbst ein Elementarpolygon mit zugehörigem m-flächigen Elementargürtel.

Angenommen nun, unter den Polygonen P_1 eines zu einem Elementarpolygone R_1 gehörigen Elementargürtels $G_6 \equiv (R_1, R_2)$

seien zwei isomorphe, einander aber nicht schneidende Polygone P_1 und P_1' vorhanden. Dieselben werden den Gürtel in drei doppelt berandete Stücke Γ_0, G_1, Γ_2 zerschneiden,

$$\Gamma_0 \equiv (R_1, P_1), \quad G_1 \equiv (P_1, P_1'), \quad \Gamma_2 \equiv (P_1' R_2).$$

Man setze den Gürtel G über das Polygon R_2 hinaus fort und zerschneide darauf die resultierende Fläche durch ein mit P_1' beginnendes System getrennt verlaufender isomorpher Polygone

$$P_1', P_1'', P_1''', \ldots$$

in ein System sich aneinander setzender mit $G_1 \equiv (P_1, P_1')$ isomorpher Streifen

$$G_1' \equiv (P_1', P_1''), \; G_1'' \equiv (P_1'', P_1'''), \ldots.$$

Es sei $G_1^{(p-1)}$ der letzte Streifen, welcher noch ganz innerhalb von Γ_2 liegt. Der nächstfolgende Streifen $G_1^{(p)}$ teilt dann durch sein Randpolygon $P_1^{(p+1)}$ den überschüssigen Teil von Γ_2 in einen zu $G_1^{(p)}$ gehörigen Teil $\Gamma_2^{(p)}$ und einen über $G_1^{(p)}$ hinausreichenden Teil. Dem beide Teile trennenden Polygone $P_2^{(p)}$ entsprechen in den isomorphen Streifen

$$G_1, G_1', G_1'', \ldots, G_1^{(p-1)}$$

ebenso viele isomorphe Polygone

$$P_2, P_2', P_2'', \ldots, P_2^{(p-1)}.$$

Dadurch sind auf dem Gürtel $G_1 + \Gamma_2 \equiv (P_1, R_2)$ neue isomorphe Streifen bestimmt:

$$G_2 \equiv (P_2, P_2'), \; G_2' \equiv (P_2', P_2''), \ldots, G_2^{(p-1)} \equiv (P_2^{(p-1)}, P_2^{(p)}).$$

Der nächstfolgende, an den letzten Streifen längs des Polygones $P_2^{(p)}$ sich ansetzende Streifen $G_2^{(p)}$ wird durch sein freies Randpolygon $P_2^{(p+1)}$ das Γ_2 abschliefsende Stück im allgemeinen wieder in zwei Teile spalten. Zu dem Randpolygone $P_3^{(p)}$ des ersten zu $G_2^{(p)}$ gehörigen Teiles lassen sich in den p isomorphen Streifen

$$G_2, G_2', G_2'', \ldots, G_2^{(p-1)}$$

ebensoviele isomorphe Polygone ziehen,

$$P_3, P_3', P_3'', \ldots, P_3^{(p-1)},$$

welche auf $G_1 + \Gamma_2$ gleichfalls p isomorphe Streifen bestimmen,

$$G_3 \equiv (P_3, P_3'), \; G_3' \equiv (P_3', P_3''), \; G_3'' \equiv (P_3'', P_3'''), \ldots, \; G_3^{(p-1)} \equiv (P_3^{(p-1)}, P_3^{(p)}).$$

Da die Anzahl der Grenzflächen von Γ_2 eine endliche ist, so wird eine genügend häufige, etwa q-malige, Wiederholung der angewandten Einteilungsweise die Flächen von Γ_2 endlich erschöpfen, d. h. es wird das Polygon $P_q^{(p)}$ mit dem Polygone R_2 identisch zusammenfallen. Dann aber existiert auf dem Elementargürtel $G_1 \equiv (P_1, P_1')$ ein dem Polygone R_2 isomorphes Polygon P_q.

Wenn also auf einem von zwei isomorphen Polygonen R_1 und R_2 berandeten Elementargürtel G zwei andere gleichfalls isomorphe einander aber nicht schneidende Polygone P_1 und P_1' vorkommen, so enthält der Gürtel zwischen letzteren allemal mindestens noch ein drittes seinen Randpolygonen R_1 und R_2 isomorphes Polygon P_q.

Dieser Satz bietet offenbar die Möglichkeit, jeden beliebigen Elementargürtel G durch ein System einander nicht schneidender, den Randpolygonen R_1 und R_2 und folglich einander isomorpher Polygone

$$R_1', R_1'', \ldots, R_1^{(m-1)}, R_1^{(m)}$$

in eine Reihe sich gegenseitig ausschließender, im allgemeinen nicht isomorpher *irreducibeler* Gürtel zu zerschneiden. Ist die Zahl $m = 0$, so ist der Gürtel G schon an sich irreducibel.

Man kann jetzt zu irgend einem Elementarpolygone R_1 durch fortgesetztes Ansetzen von Elementarstreifen eine ins Unendliche reichende Fläche und auf derselben alle — möglicher Weise in unendlicher Anzahl — vorhandenen, mit R_1 isomorphen Polygone $R_2, R_3, \ldots$, construieren, welche mit R_1 zusammen je einen irreducibelen Gürtel einschließen. Da, wenn a die Anzahl der Kanten des Polygones R_1 und folglich auch jedes anderen Polygones R bezeichnet, kein einziges Polygon sich über mehr als $\left[\frac{a}{4}\right]$ aufeinander folgende Elementarstreifen erstrecken kann, indem ein solches mit zwei Flächen $\langle\alpha\rangle$ eines von ihm durchquerten Elementarstreifens mindestens je zwei Kanten gemein hat, und da unter der gemachten Voraussetzung das Polygon R_2 dem gewonnenen Satze zufolge von jedem Polygone R_{2+i} geschnitten wird, so folgt, daſs alle Polygone R_{1+i} innerhalb des von den ersten an R_1 angesetzten

$\gamma + \left[\frac{a}{4}\right]$ Elementarstreifen gebildeten Gürtels G enthalten sind, wo γ die Amplitude des zwischen R_1 und R_2 liegenden Gürtels angiebt. Es enthält aber der Gürtel G nur eine endliche Anzahl von Elementarpolygonen P, also auch nur eine endliche Anzahl ϱ von den mit R_1 isomorphen Polygonen R_{1+i}. Mithin resultiert der wichtige Satz:

Theorem 7. *Die Anzahl der zu einem beliebigen Elementarpolygone gehörigen irreducibelen und allomorphen Elementargürtel ist endlich.*

Man kann sagen, dafs ein Elementarpolygon den ihm zugehörigen ϱ irreducibelen Elementargürteln gegenüber sich periodisch verhält.

Bezeichnet γ_i die Anzahl der Seitenflächen des Elementargürtels G_i, so stellt sich die Anzahl der Flächen irgend eines zu P gehörigen Elementargürtels in der Form dar,

$$a_1 \cdot \gamma_1 + a_2 \cdot \gamma_2 + \cdots + a_\varrho \cdot \gamma_\varrho,$$

wo die Gröfsen a_i beliebige positive ganze Zahlen einschliefslich der Null bedeuten. Im allgemeinen wird ein reducibeler Gürtel G auf mehr als eine Weise in ein System sich ausschliefsender irreducibeler Gürtel zerlegt werden können.

§ 16. Normalpolygone und Normalgürtel.

Die vergleichende Betrachtung der Polyeder in Rücksicht auf ihre etwaigen Elementarpolygone läfst nicht nur die zahlreiche Verbreitung dieser Polygone sondern auch eine grofse Mannigfaltigkeit in den vorkommenden Formen erkennen. Am häufigsten treten solche Polygone auf, für welche mindestens je ein zugehöriger irreducibeler Elementargürtel sich auf einen vollständigen oder einen unvollständigen Elementarstreifen und zwar so reduciert, dafs jede seiner Flächen von den beiden Randpolygonen des Streifens begrenzt wird. Diese der Natur des Gürtels nach einfachsten und, wie die Folge zeigen wird, auch wichtigsten Elementarpolygone sollen als Normalpolygone, ihre zugehörigen irreducibelen Elementargürtel als Normalgürtel bezeichnet werden.

So besitzt beispielsweise ein Tetragonhexaeder A_6' mit den Gegenecken

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{und} \quad (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$$

und den drei Paaren von Gegenflächen

$$\langle\alpha_i\rangle_4, \langle\alpha_{i+3}\rangle_4$$

1) vier Normalpolygone des Typus

$$|\alpha_1, \alpha_5|, \quad |\alpha_1, \alpha_6|, \quad |\alpha_2, \alpha_6|, \quad |\alpha_2, \alpha_4|, \quad |\alpha_3, \alpha_4|, \quad |\alpha_3, \alpha_5|,$$

2) sechs Normalpolygone des Typus

$$|\alpha_3, \alpha_5|, \quad |\alpha_1, \alpha_5|, \quad |\alpha_6, \alpha_5|, \quad |\alpha_6, \alpha_4|,$$
$$|\alpha_6, \alpha_2|, \quad |\alpha_1, \alpha_2|, \quad |\alpha_3, \alpha_2|, \quad |\alpha_3, \alpha_4|.$$

Die zugehörigen Normalgürtel bestehen

1) aus drei sich paarweise seitenden Flächen

$$\langle\alpha_7\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \cdots, \langle\alpha_8\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \cdots,$$
$$\langle\alpha_9\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_1\rangle, \cdots,$$

Fall eines vollständigen Normalgürtels,

2) aus zwei getrennten Sechsecken

*) $\langle\alpha_7\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \cdots;$

$\langle\alpha_8\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \cdots$

Fall eines unvollständigen Normalgürtels.

Ein Hexaeder zweiter Art A_6'' mit den isomorphen Ecken

$$(\langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_5) \quad \text{und} \quad (\langle\alpha_4\rangle_3, \langle\alpha_5\rangle_4, \langle\alpha_6\rangle_5)$$

besitzt

1) zwei Normalpolygone des Typus

$$|\alpha_1, \alpha_6|, \quad |\alpha_2, \alpha_6|, \quad |\alpha_2, \alpha_5|, \quad |\alpha_3, \alpha_5|, \quad |\alpha_3, \alpha_4|, \quad |\alpha_3, \alpha_6|,$$

2) zwei Normalpolygone des Typus

$$|\alpha_1, \alpha_2|, \quad |\alpha_1, \alpha_3|, \quad |\alpha_6, \alpha_3|, \quad |\alpha_6, \alpha_4|,$$
$$|\alpha_5, \alpha_4|, \quad |\alpha_5, \alpha_3|, \quad |\alpha_5, \alpha_2|, \quad |\alpha_6, \alpha_2|.$$

Die zugehörigen Normalgürtel bestehen

1) aus einem einzigen Sechseck

$$\langle\alpha_7\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \cdots,$$

2) aus vier Sechsecken

$$\langle\alpha_7\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_6\rangle, \langle\alpha_1\rangle, \cdots, \langle\alpha_8\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_6\rangle, \cdots,$$
$$\langle\alpha_9\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_8\rangle, \langle\alpha_6\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \cdots, \langle\alpha_{10}\rangle_6 | : \cdots, \langle\alpha_9\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \cdots.$$

---

*) Die Polygone $\langle\alpha_7\rangle_6$ und $\langle\alpha_8\rangle_6$ sind beide in positivem Sinne durchlaufen.

Um die allgemein topologischen Verhältnisse der Normalpolygone genauer zu studieren, treffe man folgende den Überblick erleichternde Festsetzungen.

Wenn die Oberfläche S eines gegebenen Polyeders A_n durch ein Normalpolygon

$$P \equiv k_1, k_2, \ldots, k_m$$

in die beiden Bestandteile S_1 und S_2 geteilt wird, so seien die an das Polygon grenzenden Randflächen von S_1 und S_2 entsprechend bezeichnet durch

$$\langle\beta_1\rangle, \langle\beta_2\rangle, \cdots, \langle\beta_m\rangle \quad \text{und} \quad \langle\gamma_1\rangle, \langle\gamma_2\rangle, \cdots, \langle\gamma_m\rangle,$$

wo jeder durch a aufeinander folgende Kanten k_i gehenden Fläche $\langle\alpha\rangle$ auch a verschiedene Bezeichnungen $\langle\beta\rangle$ oder $\langle\gamma\rangle$ entsprechen, je nachdem besagte Fläche zu S_1 oder S_2 gehört. Durch die Aufhebung des directen Zusammenhanges von S_1 mit S_2 und durch die Einschaltung eines — dem allgemeinsten Fall entsprechend — vollständigen Normalgürtels

$$G \equiv \langle\delta_1\rangle_6, \langle\delta_2\rangle_6, \cdots, \langle\delta_\varrho\rangle_6$$

treten an die Stelle von P die beiden Polygone

$$P' \equiv k_1', k_2', \cdots, k_m',$$
$$P'' \equiv k_1'', k_2'', \cdots, k_m'',$$

von denen P' den Bestandteil S_1, P'' den Bestandteil S_2 berandet.

Berücksichtigt man nun, dafs den $h - g + 1$ aufeinander folgenden Kanten

$$k_g, k_{g+1}, \cdots, k_{h-1}, k_h$$

einer Fläche $\langle\beta\rangle$ oder $\langle\gamma\rangle$ entweder die aufeinander folgenden Kanten

$$k_g', k_{g+1}', \cdots, k_{h-1}', k_h'$$

oder die Kanten

$$k_g'', k_{g+1}'', \cdots, k_{h-1}'', k_h''$$

einer Fläche $\langle\delta_x\rangle$ entsprechen, und dafs die durch die beiden Kanten

$$k_{g-1}' \quad \text{und} \quad k_{h+1}'$$

oder durch die Kanten

$$k_{g-1}'' \quad \text{und} \quad k_{h+1}''$$

gehenden benachbarten Flächen

$$\langle \delta_{x-1} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \delta_{x+1} \rangle$$

gleichfalls durch je eine Kante der Fläche $\langle \delta_x \rangle$ gehen, dafs endlich noch mindestens eine Kante k' oder eine Kante k'' in $\langle \delta_x \rangle$ enthalten ist, so folgt, dafs die Anzahl $h - g$ höchstens den Wert 2 haben kann, dafs also von den Kanten eines Normalpolygones höchstens drei aufeinander folgende in derselben Ebene liegen.

Der Verlauf eines, diese Bedingung erfüllenden Polygones P_1 stellt sich hiernach notwendig in folgender Gestalt dar:

$P_1 \equiv \cdots /\backslash__\beta_{i_1}__/\backslash/^{\beta_1'}\backslash/^{\beta_2'} \cdots \backslash/\backslash/^{\beta_p'}\backslash__\beta_{k_1}__/\backslash \cdots$

$\cdots \backslash/^{\overline{\quad}}\gamma_{i_2}\backslash/^{\beta_1''}\backslash/^{\beta_2''} \cdots \backslash/\backslash/^{\beta_q''}\overline{\quad}\gamma_{k_2}\backslash/ \cdots$

$\cdots /\backslash__\beta_{i_3}__/\backslash/^{\beta_1'''}\backslash/^{\beta_2'''} \cdots \backslash/\backslash/^{\beta_r'''}\overline{\quad}\gamma_{k_3}\backslash/ \cdots$

$\cdots /\backslash/\backslash \cdots /\backslash/\backslash \cdots$

$$(p, q, r = 0, 1, 2, \cdots).$$

Setzt man an dieses Polygon nach der Seite der β hin einen Elementarstreifen an, so nimmt dessen freier Rand die Form an

$P_2 \equiv \cdots \backslash__\beta_{i_4}__/\beta_1'\backslash/^{\beta_1^{(4)}}\beta_2'\backslash \cdots /\backslash/^{\beta_{p_1}^{(4)}}\beta_p''\backslash__\beta_{k_4}__/ \cdots$

$\cdots \backslash/^{\overline{\quad}}\gamma_{i_5}\backslash/^{\beta_1^{(5)}}\beta_1''\backslash \cdots /\beta_q''\backslash/^{\beta_{q_1}^{(5)}}\overline{\quad}\gamma_{k_5}\backslash/ \cdots$

$\cdots \backslash__\beta_{i_6}__/\beta_1'''\backslash/^{\beta_1^{(6)}}\backslash \cdots \backslash/\beta_r'''\backslash/^{\beta_{r_1}^{(6)}}\overline{\quad}\gamma_{k_6}\backslash/ \cdots$

$\cdots \backslash/\backslash/\backslash \cdots /\backslash/\backslash/ \cdots$

$$(p_1 = p - 1, \quad q_1 = q + 1).$$

In dem Falle nun, dafs P_1 Normalpolygon ist, müssen P_1 und P_2 isomorphe Polygone sein. Das Polygon P_2 reprä-

sentiert daher nur eine veränderte Auffassung des Polygones P_1, und umgekehrt. Enthält also das Polygon P_1 zwei Züge von den Formen:

1a) $1 \quad 2 \; \cdots \; p-1 \quad p$,

2a) $1 \quad 2 \; \cdots \; q-1 \quad q$,

so enthält es auch zwei Züge:

1b) $1 \quad 2 \; \cdots \; p \quad p+1$,

2b) $1 \quad 2 \; \cdots \; q \quad q+1$.

Nach demselben Schlusse enthält es dann aber auch zwei Züge:

1c) $1 \quad 2 \; \cdots \; p+1 \quad p+2$,

2c) $1 \quad 2 \; \cdots \; q+1 \quad q+2$,

und allgemein zwei Züge:

1) $1 \quad 2 \; \cdots \; p+\mu-1 \quad p+\mu$,

2) $1 \quad 2 \; \cdots \; q+\mu-1 \quad q+\mu$,

wo μ gröfser als jede positive ganze Zahl werden kann. *Der Verlauf eines Normalpolygones fällt sonach allemal unter die Form:*

$P \equiv \cdots \cdots \cdots$

$\cdots \cdots \cdots$,

und es zeigt der Vergleich von 1) und 2), dafs diese Form auch die hinreichende ist.

Man kann das erhaltene Resultat wie folgt formulieren:

In jedem Normalpolygone

$$P \equiv k_1, k_2, \cdots, k_m$$

folgen auf drei in einer Randfläche $\langle \beta_i \rangle$ des Bestandteiles S_1 liegende Kanten

$$k_{g-1}, k_g, k_{g+1}$$

allemal drei in einer Randfläche $\langle \gamma_i \rangle$ des Bestandteiles S_2 liegende Kanten

$$k_{h-1}, k_h, k_{h+1}.$$

Da hiernach in einem Normalzuge

$$\cdots k_{g-1}, k_g, k_{g+1}, \cdots, k_{h-1}, k_h, k_{h+1}, \cdots$$

zwischen den Tripeln

$$k_{g-1}, k_g, k_{g+1} \quad \text{und} \quad k_{h-1}, k_h, k_{h+1}$$

keine drei aufeinander folgende Kanten

$$k_{i-1}, k_i, k_{i+1}$$

in ein und derselben Ebene liegen, folgt, dafs die Anzahl der zwischen k_g und k_h liegenden Kanten eine ungerade ist, und dafs in der Kantenfolge

$$\cdots k_{g-2}, k_g, k_{g+2}, \cdots, k_{h-2}, k_h, k_{h+2}, \cdots$$

je zwei benachbarte Kanten aufserhalb einer Ebene liegen.

Aus beidem schliefst man den Satz:

Theorem 8. *Damit ein Kantenpolygon von P ein Normalpolygon sei, ist es notwendig und hinreichend, dafs die Anzahl seiner Kanten eine paare ist, und dafs in mindestens einer der beiden Kantenfolgen*

1) $\qquad k_1, k_3, \ldots, k_{2m-3}, k_{2m-1},$

2) $\qquad k_2, k_4, \ldots, k_{2m-2}, k_{2m}$

je zwei benachbarte Kanten aufserhalb einer Ebene liegen.

Hat man für ein auf dem Polyeder A_n gegebenes Normalpolygon

$$P \equiv k_1, k_2, \ldots, k_{2m-1}, k_{2m},$$

welchem ein vollständiger Normalgürtel zugehört, die durch den Satz ausgezeichnete Kantenfolge festgestellt, etwa

$$k_1, k_3, \ldots, k_{2m-3}, k_{2m-1},$$

— ich bezeichne dieselbe als eine Folge von Gegenkanten —

so kappe man die m Kanten derselben von A_n mittelst ebensovieler einander nicht störender vierseitiger Fundamentalschnitte

$$\langle\delta_1\rangle,\ \langle\delta_3\rangle,\ \ldots,\ \langle\delta_{2m-3}\rangle,\ \langle\delta_{2m-1}\rangle.$$

Je zwei benachbarte Flächen dieser Reihe

$$\langle\delta_{2i-1}\rangle \quad \text{und} \quad \langle\delta_{2i+1}\rangle$$

vermehren die Seiten der in ihrer Verbindungskante k_{2i} sich schneidenden zwei Grenzflächen

$$\langle\beta_{2i}\rangle \quad \text{und} \quad \langle\gamma_{2i}\rangle$$

um je eine Einheit. Da sie aber gleichzeitig bezüglich derselben Kante Scheitelflächen sind und auch keine Kante gemein haben, so kann das erhaltene Polyeder A_{n+m} sich selbst isomorph so stetig variiert werden, dafs successive alle m Flächenquadrupel

$$\langle\delta_{2i-1}\rangle,\ \langle\beta_{2i}\rangle,\ \langle\gamma_{2i}\rangle,\ \langle\delta_{2i+1}\rangle$$

zu gegenseitiger Kreuzung gelangen. Dadurch scheiden die m Kanten

$$k_2,\ k_4,\ \ldots,\ k_{2m-2},\ k_{2m}$$

aus den Begrenzungen der m Flächenpaare

$$\langle\beta_2\rangle,\ \langle\gamma_2\rangle;\ \langle\beta_4\rangle,\ \langle\gamma_4\rangle;\ \ldots;\ \langle\beta_{2m-2}\rangle,\ \langle\gamma_{2m-2}\rangle;\ \langle\beta_{2m}\rangle,\ \langle\gamma_{2m}\rangle$$

aus, und diese nehmen wieder ihre ursprüngliche Form an, während gleichzeitig die m Grenzflächen

$$\langle\delta_1\rangle,\ \langle\delta_3\rangle,\ \ldots,\ \langle\delta_{2m-3}\rangle,\ \langle\delta_{2m-1}\rangle$$

in ebensoviele Grenzsechsecke übergehen.

Hiermit ist gezeigt, wie für ein das Polyeder A_n in die Bestandteile S_1 und S_2 teilendes Normalpolygon die Einschaltung eines Normalgürtels zwischen S_1 und S_2 durch ein System von Fundamentalschnitten geleistet werden kann.

Es streitet nicht wider den Begriff des Normalpolygones, wenn in einem Kantenpolygone

$$P \equiv k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{2m-1},\ k_{2m}$$

mit der Gegenkantenfolge

$$k_1,\ k_3,\ \ldots,\ k_{2m-3},\ k_{2m-1}$$

zwei isomorphe Züge

$$k_{2i+1},\ k_{2i+2},\ \ldots,\ k_{2i+2h+1} \quad \text{und} \quad k_{2k+2h+1},\ k_{2k+2h},\ \ldots,\ k_{2k+1}$$

identisch zusammenfallen. Man hat bei der Construction des zugehörigen Normalgürtels nur darauf zu achten, dafs jede doppelte Kante

$$k_{2i'+1} \equiv - k_{2k'+1}$$

durch zwei einander seitende Flächen

$$\langle\delta_{2i'+1}\rangle_4 \quad \text{und} \quad \langle\delta_{2k'+1}\rangle_4$$

von dem Polyeder abzuschneiden ist.

Gemäfs dieser erweiterten Definition besitzt das Tetraeder

$$A_4 \equiv \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_3, \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_4\rangle_3$$

drei Normalpolygone des Typus

$$|\alpha_1, \alpha_4|, \quad |\alpha_1, \alpha_3|, \quad |\alpha_1, \alpha_2|, \quad |\alpha_2, \alpha_4|,$$
$$|\alpha_2, \alpha_3|, \quad |\alpha_3, \alpha_1|, \quad |\alpha_3, \alpha_4|, \quad |\alpha_4, \alpha_2|.$$

Das Pentaeder A_5 mit den sich dreifach scheitelnden Grenzdreiseiten

$$\langle\alpha_2\rangle_3 \rangle\!\overline{}_3\!\langle \langle\alpha_4\rangle_3$$

und den drei Grenzvierseiten

$$\langle\alpha_1\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_4$$

besitzt drei Normalpolygone des Typus

$$|\alpha_1, \alpha_2|, \quad |\alpha_1, \alpha_3|, \quad |\alpha_1, \alpha_4|, \quad |\alpha_5, \alpha_4|,$$
$$|\alpha_3, \alpha_4|, \quad |\alpha_3, \alpha_1|, \quad |\alpha_3, \alpha_2|, \quad |\alpha_5, \alpha_2|.$$

Endlich besitzt das oben beschriebene Hexaeder A_6'' aufser den angegebenen noch das Normalpolygon

$$|\alpha_3, \alpha_6|, \quad |\alpha_1, \alpha_3|, \quad |\alpha_1, \alpha_2|, \quad |\alpha_1, \alpha_6|,$$
$$|\alpha_6, \alpha_3|, \quad |\alpha_4, \alpha_6|, \quad |\alpha_4, \alpha_5|, \quad |\alpha_4, \alpha_3|.$$

§ 17. Die Existenz von Normalpolygonen auf einem allgemeinen Polyeder.

Der Satz, dafs von den $2m$ Kanten eines Normalpolygones

$$P \equiv k_1, k_2, \ldots, k_{2m-1}, k_{2m}$$

die mit geradem bezw. die mit ungeradem Index eine Folge von Gegenkanten bilden, ist für die weitere Theorie in doppeltem Sinne von Bedeutung. Indem derselbe nämlich einerseits ein einfaches Mittel darbietet, um für ein vorgelegtes

Polyeder A_n die sämtlichen Normalpolygone zu bestimmen, lehrt er andererseits dadurch die Frage entscheiden, ob die Existenz von Normalpolygonen auf einem allgemeinen Polyeder A_n noch an engere morphologische Vorkommnisse gebunden oder eine allgemeine invariante Eigenschaft dieser Körper ist.

Was nun zunächst das Bestimmungsverfahren der Normalpolygone eines gegebenen Polyeders A_n betrifft, so stellt sich dasselbe in allgemeinster Form wie folgt dar:

Man greife aus den $3n - 6$ Kanten von A_n eine beliebige Kante k_0 heraus und bestimme deren vier Gegenkanten

$$k_{0,1},\ k_{0,2},\ k_{0,3},\ k_{0,4},$$

wo die Bezeichnung so gewählt sei, daſs $k_{0,1}$ mit $k_{0,2}$ und $k_{0,3}$ mit $k_{0,4}$ in je einer der beiden zu k_0 gehörigen Scheitelflächen liegen. Jede der vier Kanten k_{0,ε_1} besitzt selbst wieder vier Gegenkanten

$$k_{0,\varepsilon_1,1},\ k_{0,\varepsilon_1,2},\ k_{0,\varepsilon_1,3},\ k_{0,\varepsilon_1,4},$$
$$(k_{0,1,1} \equiv k_{0,2,1} \equiv k_{0,3,1} \equiv k_{0,4,1} \equiv k_0),$$

von denen wieder die Kanten $k_{0,\varepsilon_1,2}$ als mit k_0 in je einer Ebene liegend vorausgesetzt werden.

Zu jeder unter den Kanten k_0, k_{0,ε_1} noch nicht enthaltenen Kante $k_{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ gehören wiederum vier Gegenkanten

$$k_{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,1},\ k_{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,2},\ k_{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,3},\ k_{0,\varepsilon_1,\varepsilon_2,4},$$

von denen wieder die beiden ersten und die beiden letzten je einer Grenzfläche angehören.

Fährt man in dieser Gruppierung der Kanten des Polyeders fort, so gelangt man zu folgendem Schema:

$$\begin{array}{c} X_1 \equiv \qquad k_0, \\ k_{0,1},\ k_{0,2},\ k_{0,3},\ k_{0,4}, \\ k_{0,\varepsilon_1,1},\ k_{0,\varepsilon_1,2},\ k_{0,\varepsilon_1,3},\ k_{0,\varepsilon_1,4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\mu,1},\ k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\mu,2},\ k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\mu,3},\ k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\mu,4}. \end{array}$$

Dieses Schema ist dadurch vollkommen charakterisiert, daſs von den zu einer Kante

$$k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_h}$$

der $h+1^{\text{ten}}$ Zeile gehörigen vier Gegenkanten

$$k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_h,1}, \; k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_h,2}, \; k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_h,3}, \; k_{0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_h,4}$$

nur diejenigen in die $h+2^{\text{te}}$ Zeile eingereiht sind, welche nicht schon unter den Kanten der ersten $h+1$ Zeilen enthalten sind.

Liest man jetzt aus vorstehendem Schema alle diejenigen cyklischen Kantenfolgen ab,

$$k_{\eta_g}, \; k_{\eta_{g+1}}, \; \ldots, \; k_{\eta_{k-1}}, \; k_{\eta_k}, \; k_{\eta'_{k-1}}, \; k_{\eta'_{k-2}}, \; \ldots, \; k_{\eta'_{g+1}}, \; k_{\eta_g},$$

in welchen, mit k_{η_i} und $k_{\eta'_i}$ Kanten derselben, nämlich der i^{ten} Zeile bezeichnet, die Indices von je drei aufeinander folgenden Kanten eine der vier Kombinationen vertreten

1) $0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 1; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 3,$

2) $0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 1; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 4,$

3) $0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 2; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 3,$

4) $0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 2; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h; \quad 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_h, 4,$

so liefert jede derselben eine Gegenkantenfolge eines Normalpolygones des Polyeders A_n.

Erschöpfen die Kanten des Schemas X_1 alle $(3n-6)$ Kanten von A_n, dann sind durch die resultierenden die sämtlichen Normalpolygone gegeben. Im gegenteiligen Falle bestimme man innerhalb des Systemes der aufserhalb X_1 liegenden Kanten ein zweites Schema X_2 und in demselben alle Normalpolygone, und fahre in dieser Einteilung der Kanten fort, bis die Schemata $X_1, X_2, \ldots$ alle Kanten von A_n absorbiert haben. Damit sind auch alle Normalpolygone gefunden.

Es ist leicht einzusehen, *dafs der vorbeschriebene Procefs im ungünstigsten Falle schon nach dreimaliger Wiederholung abbricht.* — Denn daraus, dafs durch zwei benachbarte, d. h. auf derselben Kante gelegene Ecken entweder eine und dieselbe oder je eine Kante des nämlichen Gegenkantensystemes geht, folgt die gleiche Eigenschaft zunächst für je zwei Ecken einer und derselben Grenzfläche und weiter für irgend zwei Ecken überhaupt. Da aber in jeder Ecke nur drei Kanten zusammenstofsen, so können, wie beispielsweise beim Tetraeder, auch nur höchstens drei einander ausschliefsende, vollständige Gegenkantensysteme neben einander existieren.

Um die notwendigen und hinreichenden Bedingungen festzustellen, unter welchen die Kanten eines allgemeinen Polyeders A_n ein, zwei oder drei vollständige Gegenkantensysteme constituieren, bezeichne man die Kanten der durch die Kante k_0 gehenden Fläche $\langle\alpha_1\rangle_{m+1}$ in ihrer natürlichen Reihenfolge durch

$$\ldots, k_{m-1}, k_m, k_0, k_1, k_2, \ldots,$$

die aus ihren Ecken

$$\ldots, (k_{m-1}, k_m), (k_m, k_0), (k_0, k_1), \ldots$$

austretenden Kanten durch

$$\ldots, k_m', k_0', k_1', \ldots .$$

Es gehören dann zu dem Systeme der Gegenkanten von k_0 die Kanten:

$$k_2', k_3, k_5', k_6, k_8', k_9, \ldots,$$

$$(k_i \equiv k_{i+m+1} \equiv k_{i+2m+2}, \quad k_i' \equiv k'_{i+m+1} \equiv k'_{i+2m+2}).$$

Fällt daher die Anzahl $m_1 = m + 1$ der Kanten von $\langle\alpha_1\rangle$ unter eine der Formen:

1) $\quad m_1 = 3m' + 1, \qquad$ 2) $\quad m_1 = 3m' + 2,$

so sind alle Kanten k_i und k_i' mittelbare Gegenkanten der einen Kante k_0.

Nach Früherem bedingt aber die Zugehörigkeit von drei in einer Ecke zusammenstofsenden Kanten zu dem nämlichen Gegenkantensysteme auch die Zugehörigkeit jeder weiteren Kante zu diesem Systeme, mithin folgt, dafs unter der gemachten Annahme die Kanten von A_n ein einziges System von Gegenkanten bestimmen.

In dem zweiten möglichen Falle, dafs die Seitenanzahlen der Grenzflächen des Polyeders durchgängig Multipla der Zahl drei sind, führt schon die Annahme, dafs irgend eine Kante k_0 mit irgend zwei in einer Ecke zusammenstofsenden Kanten k_i und k_k durch zwei Reihen aufeinanderfolgender Gegenkanten verbunden sei, wie durch

$$k_0, k_1', k_2', \ldots, k_p', k_i \quad \text{und} \quad k_0, k_1'', k_2'', \ldots, k_q'', k_k,$$

auf einen logischen Widerspruch.

Zunächst kann man nämlich den angesetzten zwei Kantenfolgen die Beschränkungen auferlegen, dafs keine dieselbe Kante zweimal enthält, und dafs beide die einzige Kante k_0 gemein haben. Andererseits würden sich aus ihnen sogleich zwei andere Folgen ableiten lassen, welchen diese Eigenschaften zukommen.

Bestimmt man nun in einer so definierten cyklischen Reihe

$$k_0,\ k_1',\ k_2',\ \ldots,\ k_p',\ k_i,\ k_k,\ k_q'',\ k_{q-1}'',\ \ldots,\ k_1'',\ k_0$$

die unzweideutig bestimmten Verbindungskanten der einzelnen Paare benachbarter Gegenkanten, so tritt an die Stelle der vorstehenden unterbrochenen Kantenfolge ein eindeutig fixiertes geschlossenes Polygon:

$$P_1 \equiv k_0,\ k_{0,1}',\ k_1',\ k_{1,2}',\ k_2',\ \ldots,\ k_p',\ k_{p,i}',\ k_i,$$
$$k_k,\ k_{k,q}'',\ k_q'',\ k_{q,q-1}'',\ k_{q-1}'',\ \ldots,\ k_1'',\ k_{1,0}'',\ k_0.$$

Dabei ist wesentlich zu bemerken, dafs eine Kante k_h' oder eine Kante k_h'' zu den Kanten von P_1 gehört, oder nicht, je nachdem die ihr beiderseits benachbarten Gegenkanten $k_{h\mp1}'$ oder $k_{h\mp1}''$ aufserhalb oder innerhalb einer Ebene liegen.

Man kann die weiteren Schlüsse wiederum auf den eingeschränkten Fall basieren, in welchem weder eine Kante k_g' mit einer Kante k_h'', noch eine Kante $k_{g-1,g}'$ mit einer Kante k_h'', noch eine Kante k_g' mit einer Kante $k_{h,h-1}''$, noch endlich eine Kante $k_{g-1,g}'$ mit einer Kante $k_{h,h-1}''$ zusammenfällt. Denn je nachdem einer dieser vier Umstände stattfände, würde entsprechend eine der Reihen

a) $k_h'' \equiv k_g',\ k_{g+1}',\ \ldots,\ k_p',\ k_i,\ k_k,\ k_q'',\ k_{q-1}'',\ \ldots,\ k_{h+1}'',\ k_h'' \equiv k_g',$

b) $k_0,\ k_1',\ k_2',\ \ldots,\ k_{g-1}',\ k_{g-1,g}' \equiv k_h'',\ k_{h-1}'',\ \ldots,\ k_1'',\ k_0,$

c) $k_0,\ k_1',\ k_2',\ \ldots,\ k_{g-1}',\ k_g' \equiv k_{h,h-1}'',\ k_{h-1}'',\ k_{h-2}'',\ \ldots,\ k_1'',\ k_0,$

d_α) $k_0,\ k_1',\ k_2',\ \ldots,\ k_{g-1}',\ k_{h-1}'',\ \ldots,\ k_2'',\ k_1'',\ k_0,$

d_β) $k_0,\ k_1',\ k_2',\ \ldots,\ k_{g-1}',\ k_g',\ k_{h-1}'',\ k_{h-2}'',\ \ldots,\ k_1'',\ k_0$

den gestellten Forderungen genügen und zweckmäfsig an die Stelle der ursprünglichen Folge treten.

Dies vorausgeschickt, bezeichne S_1 denjenigen von dem Polygone P_1 berandeten Bestandteil der Oberfläche des Polyeders A_n, welcher die von den Kanten k_i und k_k mitbegrenzte

Fläche $\langle \alpha_{i,k} \rangle$ umfafst. Da diese Fläche 3μ Kanten besitzt, nämlich

$$k_i \equiv k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}, \ldots, k_{k_3}, k_{k_2}, k_{k_1} \equiv k_k,$$

kann man, dem Laufe des Polygones folgend, zwischen den beiden Kanten k_i und k_k eine Verbindungsreihe von durch die Ecken der Fläche $\langle \alpha_{i,k} \rangle$ gehenden Kanten herstellen:

$$k_i, k_{i_2}', k_{i_4}, k_{i_5}', \ldots, k_{i'}, k_{k'}, \ldots, k_{k_5}', k_{k_4}, k_{k_2}', k_k,$$

in welcher sowohl je zwei zwischen k_i und $k_{i'}$, als je zwei zwischen k_k und $k_{k'}$ liegende benachbarte Kanten directe Gegenkanten sind, die Kanten $k_{i'}$, $k_{k'}$ aber in einer Ecke von $\langle \alpha_{i,k} \rangle$ zusammenstofsen.

Das zu der Kantenfolge

$$k_0, k_1', \ldots, k_p', k_i, k_{i_2}', \ldots, k_{i'}, k_{k'}, \ldots, k_{k_2}', k_k, k_q'', \ldots, k_1'', k_0$$

gehörige Polygon

$$P_2 \equiv k_0, k_{0,1}', k_1', \ldots, k_{i'}, k_{k'}, \ldots, k_1'', k_{1,0}'', k_0$$

wird einen Bestandteil S_2 beranden, welcher die sämtlichen Flächen von S_1 mit Ausschlufs der einen Fläche $\langle \alpha_{i,k} \rangle$ enthält.

Man kann, wie vorher aus dem Polygone P_1 mittelst der Fläche $\langle \alpha_{i,k} \rangle$ das Polygon P_2, aus diesem mittelst einer der beiden durch $k_{i'}$ und $k_{k'}$ gehenden, möglicherweise identischen Flächen $\langle \alpha_{i'} \rangle$ und $\langle \alpha_{k'} \rangle$ des Bestandteiles S_2 ein Polygon P_3 ableiten,

$$P_3 \equiv k_0, k_{0,1}', k_1', \ldots, k_{i''}, k_{k''}, \ldots, k_1'', k_{1,0}'', k_0,$$

dessen zugehöriger Bestandteil S_3 eine Fläche weniger als S_2 enthält, und in dieser Reduction fortfahren, bis man schliefslich zu einer Kantenfolge gelangt,

$$k_0, k_1', \ldots, k_{i(m)}, k_{k(m)}, \ldots, k_1'', k_0,$$

deren zugehöriges Polygon P_m nur noch eine einzige Grenzfläche $\langle \alpha \rangle$ einschliefst.

Es setzt aber die Existenz vorstehender Verbindung notwendig voraus, dafs die Anzahl der Kanten dieser Fläche $\langle \alpha_{i(m), k(m)} \rangle$ unter eine der beiden Formen fällt:

$$\mu = 3m' + 1 \quad \text{oder} \quad \mu = 3m' + 2;$$

das aber verstöfst gegen die eingangs gemachte Voraussetzung.

Fafst man alles zusammen, so kann man folgendes Resultat aussprechen:

Theorem 9. *Die $3n - 6$ Kanten eines allgemeinen Polyeders A_n ordnen sich entweder, wie im Falle des Pentaeders, in ein einziges, oder, wie im Falle des Tetraeders, in drei getrennte aus je $n - 2$ Elementen bestehende Systeme von Gegenkanten, und zwar findet die erste oder die zweite Anordnung statt, je nachdem nur ein Teil oder alle Grenzflächen des Polyeders durch eine mittelst drei teilbare Anzahl von Kanten begrenzt sind*).*

Kappt man von einem Polyeder A_n der zweiten Kategorie die $2n - 4$ Ecken mittels ebensovieler dreiseitiger Schnitte, so stellt das resultierende Polyeder A_{3n-4} wiederum einen Körper der nämlichen Art und zugleich ein Polyeder der zweiten Klasse im Sinne des Paragraph 9 dar. Schneidet man andererseits von demselben Polyeder A_n die $n - 2$ Kanten eines Systemes von Gegenkanten mittels ebensovieler vierseitiger

---

*) Aus der Bemerkung, daſs, wenn $(\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l)$ irgend eine Ecke eines allgemeinen Polyeders ist, sowohl durch die vier Fundamentalschnitte

$$\delta_1 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l), \; \delta_2 \stackrel{\bullet}{-} (\delta_1, \alpha_i, \alpha_k), \; \delta_3 \stackrel{\bullet}{-} (\delta_1, \alpha_k, \alpha_l), \; \delta_4 \stackrel{\bullet}{-} (\delta_1, \alpha_l, \alpha_i),$$

als auch durch die sechs Fundamentalschnitte

$$\delta_1 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l), \; \delta_2 \stackrel{\bullet}{-} (\delta_1, \alpha_i, \alpha_k), \; \delta_3 \stackrel{\blacksquare}{-} |\delta_1, \alpha_k|,$$
$$\delta_4 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_i, \delta_1, \delta_2), \; \delta_5 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_k, \delta_2, \delta_3), \; \delta_6 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_l, \delta_3, \delta_1)$$

die Seiten der drei Grenzflächen

$$\langle\alpha_i\rangle, \; \langle\alpha_k\rangle, \; \langle\alpha_l\rangle$$

um je drei vermehrt werden, während nur solche Grenzflächen hinzutreten, deren Seitenanzahlen Multipla von 3 sind, folgt, daſs für jedes n von der Form

$$n = 4 + 4m \quad \text{und} \quad n = 4 + 6m,$$

d. h. für jedes n der Form

$$n = 8 + 2m$$

n-eder construiert werden können, für welche die Zahl der Seiten jeder Grenzfläche ein Vielfaches von 3 ist.

Ob auch für eine unpaare Flächenzahl Polyeder dieses Typus existieren, konnte nicht entschieden werden.

Die beiden ersten Figuren der Tafel II veranschaulichen zwei Polyeder mit drei getrennten Systemen von Gegenkanten. In denselben sind die Kanten der verschiedenen Systeme durch verschiedene Schattierung hervorgehoben.

Schnitte ab, dann erhält man einen Körper A_{2n-2} der dritten in Paragraph 9 definierten Klasse, und zwar einen solchen, für welchen die Seitenanzahlen sämtlicher Grenzpolygone Multipla von 4 sind.

Zur Beantwortung der zweiten, an den Eingang gestellten Hauptfrage übergehend, setze man zwischen den vier directen Gegenkanten einer Kante k_1 folgende Unterscheidungen fest: Man fasse die Oberfläche S des Polyeders als Operationsgebiet auf und lege innerhalb desselben der Kante k_1 eine bestimmte Richtung $k_1 \equiv | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |$ bei. Alsdann erscheinen die beiden in k_1 sich kantenden Grenzflächen $\langle\beta_1\rangle$ und $\langle\gamma_1\rangle$ einem mit den Füſsen nach der Ecke $\mathfrak{a}_1$, mit dem Kopfe nach der Ecke $\mathfrak{b}_1$ gerichteten, in das Innere des Polyeders blickenden Beobachter als links- und rechtsseitige Fläche, und, indem man, der Richtung $| \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |$ folgend, die Umfänge beider Flächen bis zu ihren nächsten Ecken beschreibt, wird man dieselben auf resp. der *links-* und der *rechtsseitigen Gegenkante der Kante* $k_1 \equiv | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |$ verlassen.

Nach diesen Definitionen besitzt eine ihrer Lage und Richtung nach gegebene Kante

$$k_1 \equiv | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |$$

nicht nur genau eine linksseitige und eine rechtsseitige Gegenkante, nämlich resp.

$$k_{1,1} \equiv | \mathfrak{a}_{1,1}, \mathfrak{b}_{1,1} | \quad \text{und} \quad k_{1,2} \equiv | \mathfrak{a}_{1,2}, \mathfrak{b}_{1,2} |,$$

sondern es ist dieselbe auch nur zu einer einzigen Kante linksseitige, zu einer einzigen rechtsseitige Gegenkante, nämlich zu resp.

$$k_{1,3} \equiv | \mathfrak{a}_{1,3}, \mathfrak{b}_{1,3} | \quad \text{und} \quad k_{1,4} \equiv | \mathfrak{a}_{1,4}, \mathfrak{b}_{1,4} |.$$

Man bestimme nunmehr, ausgehend von einer Kante

$$k_1 \equiv | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |$$

diejenige Kantenfolge

$$k_1 \equiv | \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |, \quad k_2 \equiv | \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2 |, \quad k_3 \equiv | \mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3 |, \ldots,$$

in welcher jede folgende Kante linksseitige Gegenkante der vorhergehenden ist. Dann zeigt die Folge der Zwischenkanten

$$k_{1,2} \equiv | \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2 |, \quad k_{2,3} \equiv | \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3 |, \quad k_{3,4} \equiv | \mathfrak{b}_3, \mathfrak{a}_4 |, \ldots$$

offenbar die *entgegengesetzte* Eigenschaft. Es mufs aber, da die Anzahl der unmittelbaren und mittelbaren Gegenkanten der Kante k_1 eine endlich begrenzte ist, in dem genügend weit fortgesetzten Kantenzuge

$$k_1,\ k_{1,2},\ k_2,\ k_{2,3},\ k_3,\ k_{3,4},\ \ldots$$

eine erste Kante

$$k_m \equiv |\,\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m\,|$$

auftreten, welche entweder mit einer der vorhergehenden Kanten zusammenfällt, oder als dritte Kante in eine Ecke des Zuges neu eintritt. Dabei kommen verschiedene Möglichkeiten in Betracht.

1a) Angenommen, es coincidieren die Kanten

$$k_m \equiv |\,\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m\,| \quad \text{und} \quad k_i \equiv |\,\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i\,|,$$

so auch als linksseitige Gegenkanten der identischen Kanten

$$|\,\mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_m\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{a}_i\,|$$

die beiden Kanten

$$|\,\mathfrak{b}_{m-1},\ \mathfrak{a}_{m-1}\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_{i-1}\,|.$$

Es sind aber Voraussetzung und Folgerung miteinander nur in dem einzigen Falle verträglich, wo $|\,\mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_m\,| \equiv |\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_1\,|$ ist, und dann definiert die Reihe

$$k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_{m-1},\ k_m$$

eine Gegenkantenfolge eines Normalpolygones.

1b) Angenommen, es coincidieren die Kanten

$$|\,\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{a}_i\,|,$$

so auch als linksseitige Gegenkanten der identischen Kanten

$$|\,\mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_m\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i\,|$$

die beiden Kanten

$$|\,\mathfrak{b}_{m-1},\ \mathfrak{a}_{m-1}\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{a}_{i+1},\ \mathfrak{b}_{i+1}\,|;$$

ein für keinen Index i mit der Definition der Kante $|\,\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m\,|$ vereinbarer Schlufs.

2a) Angenommen, es coincidieren die Kanten

$$|\,\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_i\,|.$$

In diesem Falle repräsentiert die Kantenfolge

$$| \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i |, | \mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_{i+1} |, \ldots, | \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m |$$

eine linksseitige Gegenkantenfolge, deren erste und letzte Kante in einer Ecke $\mathfrak{b}_m \equiv \mathfrak{a}_i$ zusammenstofsen.

2b) Angenommen, es coincidieren die Kanten

$$| \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m | \quad \text{und} \quad | \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_{i-1} |.$$

Alsdann giebt die Folge

$$| \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i |, | \mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_{i+1} |, \ldots, | \mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{b}_{m-1} |$$

eine Reihe aufeinander folgender linksseitiger Gegenkanten, deren erste und letzte Kante

$$| \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i | \quad \text{und} \quad | \mathfrak{a}_{m-1}, \mathfrak{b}_{m-1} |$$

mit einer Kante

$$| \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_{m-1} |$$

einem ebenen Kantenzuge angehören.

3) Die beiden noch übrigen Fälle, in welchen die Kante

$$| \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m |$$

als dritte in einer Ecke $\mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_i$ endende Kante

$$| \mathfrak{a}_m, \mathfrak{a}_i |, \quad | \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_i |$$

erscheint, zeigen denselben Charakter wie resp. die Fälle 2a) und 2b).

Aus den vorstehenden Deductionen läfst sich unmittelbar eine bemerkenswerte Folgerung ziehen. Da nämlich für ein Polyeder mit drei vollständigen Gegenkantensystemen die Fälle 2) und 3) ausgeschlossen sind, so tritt für einen solchen Körper allemal der Fall 1a) ein.

Man hat mithin den Satz:

Durch jede Kante eines allgemeinen Polyeders mit drei vollständigen Gegenkantensystemen gehen allemal und mindestens zwei, nämlich ein links- und ein rechtsseitiges Normalpolygon.

Auch in dem Falle eines ganz beliebigen Polyeders mufs die zu einer Kante $| \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |$ gehörige links- oder rechtsseitige Folge von Gegenkanten

$$| \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1 |, | \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2 |, \ldots, | \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i |, \ldots, | \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k |, \ldots,$$

da Coincidencen von Kantenpaaren

$$|\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i| \equiv |\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{b}_k| \quad \text{und} \quad |\mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i| \equiv |\mathfrak{b}_k,\ \mathfrak{a}_k|$$

ein für allemal ausgeschlossen sind, sich stets in der Weise schliefsen, dafs eine letzte Kante $|\mathfrak{a}_{m+1},\ \mathfrak{b}_{m+1}|$ mit der ersten Kante $|\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1|$ zur Deckung gelangt. Hierbei wird das zugehörige $2m$-kantige Polygon

$$P \equiv \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1$$

im allgemeinen sich selbst ein oder mehrere Male durchsetzen.

Um unter der Voraussetzung einer linksseitigen Folge zunächst den Fall eines sich einmal durchsetzenden Polygones zu erörtern, hat man entsprechend der Art der Durchsetzung vier Möglichkeiten zu unterscheiden, nämlich:

1) $P_1 \equiv \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{i-1},\ \mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i,\ \ldots,$
$\mathfrak{a}_{k-1},\ \mathfrak{b}_{k-1},\ \mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{a}_{k+1},\ \mathfrak{b}_{k+1},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1;$

2) $P_2 \equiv \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{i-1},\ \mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i,\ \ldots,$
$\mathfrak{a}_{k-1},\ \mathfrak{b}_{k-1},\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_{k+1},\ \mathfrak{b}_{k+1},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1;$

3) $P_3 \equiv \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{i-1},\ \mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i,\ \ldots,$
$\mathfrak{a}_{k-1},\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{b}_k,\ \mathfrak{a}_{k+1},\ \mathfrak{b}_{k+1},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1;$

4) $P_4 \equiv \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_i,\ \ldots,$
$\mathfrak{a}_{k-1},\ \mathfrak{b}_i,\ \mathfrak{a}_i,\ \mathfrak{b}_k,\ \mathfrak{a}_{k+1},\ \mathfrak{b}_{k+1},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1.$

Es fragt sich, ob zu diesen vier Typen von Kantenpolygonen auch noch elementare Einschaltungsflächen existieren, und wie dieselben zu construieren sind.

Unter der Annahme eines Polygones P_1 kann man nach § 17 von dem Polyeder die $m-1$ Kanten der Folge

$$|\mathfrak{a}_{k+1},\ \mathfrak{b}_{k+1}|,\ |\mathfrak{a}_{k+2},\ \mathfrak{b}_{k+2}|,\ \ldots,\ |\mathfrak{a}_m,\ \mathfrak{b}_m|,\ |\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_1|,\ |\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_2|,\ \ldots,$$
$$|\mathfrak{a}_{k-2},\ \mathfrak{b}_{k-2}|,\ |\mathfrak{a}_{k-1},\ \mathfrak{b}_{k-1}|$$

durch folgende sich paarweise seitende Grenzflächen abschneiden,

$$\langle\delta_{k+1}\rangle_5,\ \langle\delta_{k+2}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta_m\rangle_6,\ \langle\delta_1\rangle_6,\ \langle\delta_2\rangle_6,\ \ldots,$$
$$\langle\delta_i\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta_{k-2}\rangle_6,\ \langle\delta_{k-1}\rangle_5,$$

so dafs nur die in der Kante

$$|\mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{b}_k| \equiv |\mathfrak{b}_{i-1},\ \mathfrak{a}_i|$$

sich seitenden zwei Grenzflächen

$$\langle \cdot\cdot, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k, \cdot\cdot \rangle \equiv \langle \alpha_k \rangle_{\mathfrak{a}_k} \quad \text{und} \quad \langle \cdot\cdot, \mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_k, \cdot\cdot \rangle \equiv \langle \beta_k \rangle_{\mathfrak{b}_k}$$

die Anzahlen ihrer Seiten ändern, nämlich sie um je eine Einheit vermehren. Dadurch aber, dafs weiter mittelst der beiden Flächen

$$\langle \alpha_k' \rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle \beta_k' \rangle_6$$

resp. die Kantenpaare

$$| \alpha_k, \delta_{i-1} |, | \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_{k-1} | \quad \text{und} \quad | \beta_k, \delta_i |, | \mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{k+1} |$$

abgeschnitten, und sie selbst längs ihrer Scheitelkante

$$| \delta_{i-1}, \delta_i |$$

zur Kreuzung gebracht werden, nehmen alle Grenzflächen von A_n ihre ursprüngliche, die eingeschalteten Flächen die Form von Grenzsechsecken an. — Es läfst sich also längs des Polygones P_1 in der That eine nur Grenzsechsecke enthaltende, d. h. eine Elementarfläche einschalten.

Man erkennt leicht, dafs die wesentlichen Bedingungen vorstehender Construction auch seitens der Polygone P_2, P_3 und P_4 erfüllt werden, und schliefst daher den Satz:

Ist auf einem allgemeinen Polyeder A_n eine links- oder rechtsseitige Folge von Gegenkanten gegeben, deren zugehöriges Kantenpolygon sich selbst ein- oder h-mal durchsetzt, ohne dafs aber in einer Ecke mehr als zwei dieser Gegenkanten zusammenstofsen, so kann man längs desselben stets eine aus $m + 1$ oder $m + h$ Grenzsechsecken zusammengesetzte Elementarfläche in die Oberfläche des Polyeders einschalten.

Im Gegensatze zu einem Elementargürtel zeigt diese Einschaltungsfläche nicht mehr die Eigenschaft, dafs auf ihr ein dem Grundpolygone isomorphes oder auch nur gleichartiges, d. h. wieder ein links- oder rechtsseitiges Normalpolygon existiert.

Denn schreibt man abkürzungsweise:

$$\langle [\mathfrak{b}_m, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1] \rangle \equiv \langle \alpha_1 \rangle, \quad \langle [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2] \rangle \equiv \langle \beta_1 \rangle,$$
$$\langle [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2] \rangle \equiv \langle \alpha_2 \rangle, \quad \langle [\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{a}_3] \rangle \equiv \langle \beta_2 \rangle, \ldots,$$

und bestimmt zu der Kante $| \alpha_1, \delta_1 |$ die linksseitige Gegenkantenfolge, nämlich:

$$|\alpha_1, \delta_1|, \; |\alpha_2, \delta_2|, \ldots,$$
$$|\alpha_{i-1}, \delta_{i-1}|, \; |\alpha_k', \beta_k'|, \; |\beta_i, \delta_i|, \; |\beta_{i+1}, \delta_{i+1}|, \ldots,$$
$$|\beta_{k-1}, \delta_{k-1}|, \; |\alpha_k', \delta_{i-1}|, \; |\beta_k', \beta_k|, \; |\beta_{k+1}, \delta_{k+1}|, \; |\beta_{k+2}, \delta_{k+2}|, \ldots,$$
$$|\beta_m, \delta_m|, \; |\beta_1, \delta_1|, \; |\beta_2, \delta_2|, \ldots,$$
$$|\beta_{i-1}, \delta_{i-1}|, \; |\beta_k', \delta_{k+1}|, \; |\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}|, \ldots,$$
so tritt diese mit der Kante $|\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}|$ aus der Einschaltungsfläche heraus.

Es werde jetzt eine linksseitige geschlossene Folge von Gegenkanten betrachtet,

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \; |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2|, \ldots, \; |\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|, \ldots, \; |\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k|, \ldots,$$
$$|\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l|, \ldots, \; |\mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m|, \; |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|,$$

von welcher drei Kanten

$$|\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|, \; |\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k|, \; |\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l|$$

in einer Ecke zusammenstofsen.

Dabei kommen vier Möglichkeiten in Frage:

1) $\mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{b}_k \equiv \mathfrak{b}_l$, 2) $\mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{b}_k \equiv \mathfrak{a}_l$,

3) $\mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{a}_k \equiv \mathfrak{a}_l$, 4) $\mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{a}_k \equiv \mathfrak{a}_l$.

Da durch den Wechsel der Bezeichnungen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$ und durch die mit demselben verbundenen Namensänderungen der übrigen Kanten $|\mathfrak{b}_{m-h}, \mathfrak{a}_{m-h}|$ in $|\mathfrak{a}_{h+2}, \mathfrak{b}_{h+2}|$ der erste Fall in den vierten und der zweite in den dritten übergeht, bleiben nur die Fälle 1) und 2) als wesentlich verschieden übrig.

Unter der ersten Annahme hat man in dem Polygone

$$P_1 \equiv \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_{i+1}, \ldots,$$
$$\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}, \ldots,$$
$$\mathfrak{a}_{l-1}, \mathfrak{b}_{l-1}, \mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l, \mathfrak{a}_{l+1}, \mathfrak{b}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m, \mathfrak{a}_1$$

aufser den genannten noch folgende zusammenfallende Ecken:

$$\mathfrak{a}_i \equiv \mathfrak{a}_{k+1}, \; \mathfrak{a}_k \equiv \mathfrak{a}_{l+1}, \; \mathfrak{a}_l \equiv \mathfrak{a}_{i+1}.$$

Behufs Construction einer zugehörigen Einschaltungsfläche kappe man zunächst die Kanten

$$\ldots, |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \ldots, |\mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{b}_{i-1}|, |\mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_{i+1}|, |\mathfrak{a}_{i+2}, \mathfrak{b}_{i+2}|, \ldots,$$
$$\ldots, |\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{b}_{k-1}|, |\mathfrak{a}_{k+1}, \mathfrak{b}_{k+1}|, |\mathfrak{a}_{k+2}, \mathfrak{b}_{k+2}|, \ldots,$$
$$\ldots, |\mathfrak{a}_{l-1}, \mathfrak{b}_{l-1}|, |\mathfrak{a}_{l+1}, \mathfrak{b}_{l+1}|, |\mathfrak{a}_{l+2}, \mathfrak{b}_{l+2}|, \ldots, |\mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m|$$

in bekannter Weise durch die Flächen

$$\langle\delta_1\rangle_6, \ldots, \langle\delta_{i-1}\rangle_5, \langle\delta_{i+1}\rangle_5, \langle\delta_{i+2}\rangle_6, \ldots,$$
$$\ldots, \langle\delta_{k-1}\rangle_5, \langle\delta_{k+1}\rangle_5, \langle\delta_{k+2}\rangle_6, \ldots,$$
$$\ldots, \langle\delta_{l-1}\rangle_5, \langle\delta_{l+1}\rangle_5, \langle\delta_{l+2}\rangle_6, \ldots, \langle\delta_m\rangle_6.$$

Durch diese Operation verwandeln sich die in der Ecke

$$\mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{b}_k \equiv \mathfrak{b}_l$$

zusammenstofsenden drei Flächen

$$\langle\alpha_i\rangle_{a_i}, \langle\alpha_k\rangle_{a_k}, \langle\alpha_l\rangle_{a_l}$$

in die anderen

$$\langle\alpha_i\rangle_{a_i+2}, \langle\alpha_k\rangle_{a_k+2}, \langle\alpha_l\rangle_{a_l+2},$$

während alle übrigen Grenzflächen von A_n ihren Formen nach ungeändert bleiben. Indem man nun weiter mittelst der drei Flächen

$$\langle\delta_i\rangle_5, \langle\delta_k\rangle_5, \langle\delta_l\rangle_5$$

resp. die Kanten

$$|\,\alpha_l, \alpha_i\,|, \ |\,\alpha_i, \alpha_k\,|, \ |\,\alpha_k, \alpha_l\,|$$

und darauf mittelst der drei Grenzsechsecke

$$\langle\delta_i'\rangle_6, \langle\delta_k'\rangle_6, \langle\delta_l'\rangle_6$$

resp. von den Flächen

$$\langle\alpha_i\rangle_{a_i+2}, \langle\alpha_k\rangle_{a_k+2}, \langle\alpha_l\rangle_{a_l+2}$$

die Kantentripel abschneidet,

$$\langle\alpha_i\rangle : |\,\beta_{i-1}, \delta_{k+1}, \delta_i, \ \langle\alpha_k\rangle : |\,\beta_{k-1}, \delta_{l+1}, \delta_k, \ \langle\alpha_l\rangle : |\,\beta_{l-1}, \delta_{i+1}, \delta_l,$$

gehen die Flächen

$$\begin{array}{lll} \langle\delta_{k+1}\rangle_5, & \langle\delta_{l+1}\rangle_5, & \langle\delta_{i+1}\rangle_5, \\ \langle\delta_{i-1}\rangle_5, & \langle\delta_{k-1}\rangle_5, & \langle\delta_{l-1}\rangle_5, \\ \langle\delta_k\rangle_5, & \langle\delta_l\rangle_5, & \langle\delta_i\rangle_5, \\ \langle\alpha_i\rangle_{a_i+2}, & \langle\alpha_k\rangle_{a_k+2}, & \langle\alpha_l\rangle_{a_l+2} \end{array}$$

in die anderen über:

$$\begin{array}{lll} \langle\delta_{k+1}\rangle_6, & \langle\delta_{l+1}\rangle_6, & \langle\delta_{i+1}\rangle_6, \\ \langle\delta_{i-1}\rangle_6, & \langle\delta_{k-1}\rangle_6, & \langle\delta_{l-1}\rangle_6, \\ \langle\delta_k\rangle_6, & \langle\delta_l\rangle_6, & \langle\delta_i\rangle_6, \\ \langle\alpha_i\rangle_{a_i}, & \langle\alpha_k\rangle_{a_k}, & \langle\alpha_l\rangle_{a_l}. \end{array}$$

Es bestimmen also die eingeführten $m + 3$ Grenzsechsecke in der That wieder eine zum Polygone P_1 gehörige elementare Einschaltungsfläche.

Der Unterschied zwischen den Polygonen P_1 und P_2 besteht im wesentlichen darin, daſs die zu P_1 gehörigen Kanten

$$|\mathfrak{a}_{l-1}, \mathfrak{b}_{l-1}|, \quad |\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l|, \quad |\mathfrak{a}_{l+1}, \mathfrak{b}_{l+1}|$$

für P_2 in die anderen übergehen

$$|\mathfrak{b}_{l+1}, \mathfrak{a}_{l+1}|, \quad |\mathfrak{b}_l, \mathfrak{a}_l|, \quad |\mathfrak{b}_{l-1}, \mathfrak{a}_{l-1}|.$$

Es gehört daher auch dem Polygone P_2 eine elementare Einschaltungsfläche zu.

Sei schlieſslich, der allgemeinsten Annahme zu genügen, von dem zur Kante $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|$ gehörigen linksseitigen Normalpolygone vorausgesetzt, daſs in zwei oder mehreren Ecken $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots$ desselben je drei Gegenkanten $|\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|$ zusammenstoſsen, so sind die bisherigen Einschaltungsmethoden da nicht mehr anwendbar, wo zwei oder mehrere Ecken $\mathfrak{q}_h$ ein zusammenhängendes System bilden, d. h. wo aus einer ersten Ecke $\mathfrak{q}_1$ eine Kante nach einer zweiten Ecke $\mathfrak{q}_2$, aus einer von den beiden Ecken $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ eine zweite Kante nach einer dritten Ecke $\mathfrak{q}_3$, aus einer von den drei Ecken $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_3$ eine dritte Kante nach einer vierten Ecke $\mathfrak{q}_4$ u. s. w. führt. Man wird dann jede Verbindungskante

$$|\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l| \equiv |\langle\gamma_1\rangle, \langle\gamma_2\rangle| \equiv |\mathfrak{a}_{l'}, \mathfrak{b}_{l'}|$$

zweier solcher Ecken

$$\mathfrak{q}_1 \equiv (|\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|, \quad |\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k|, \quad |\mathfrak{a}_l, \mathfrak{b}_l|)$$

und

$$\mathfrak{q}_2 \equiv (|\mathfrak{a}_{i'}, \mathfrak{b}_{i'}|, \quad |\mathfrak{a}_{k'}, \mathfrak{b}_{k'}|, \quad |\mathfrak{a}_{l'}, \mathfrak{b}_{l'}|)$$

durch ein Grenzsechsseit der Form abschneiden,

$$\langle\delta_l\rangle_6 \equiv |\delta_l, \gamma_1|, \; |\delta_l, \delta_i|, \; |\delta_l, \delta_k|, \; |\delta_l, \gamma_2|, \; |\delta_l, \delta_{i'}|, \; |\delta_l, \delta_{k'}|,$$

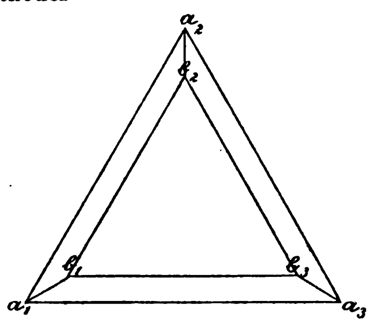
im übrigen aber die früheren Constructionen entweder direct oder passend modificiert anwenden, und so wieder zu einer durch das Polygon bestimmten elementaren Einschaltungsfläche gelangen.

Man kann daher den Satz aussprechen:

Theorem 10. *Auf einem allgemeinen Polyeder giebt es zu jeder Kante ein links- und ein rechtsseitiges Normalpolygon, längs denen sich je eine Elementarfläche in die Oberfläche des Polyeders einschalten läſst.*

Im besonderen kann es geschehen, daſs die zu der Kante $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|$ gehörige links- oder rechtsseitige Folge von Gegen-

kanten alle $3n - 6$ Kanten des Polyeders umfaſst. So wird die in dem Pentaeder



der Kante $|\,\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1\,|$ zugehörige linksseitige Folge gegeben durch:

$$|\,\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1\,|, \quad |\,\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3\,|, \quad |\,\mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_1\,|, \quad |\,\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2\,|, \quad |\,\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_1\,|,$$
$$|\,\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2\,|, \quad |\,\mathfrak{a}_3, \mathfrak{b}_3\,|, \quad |\,\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2\,|, \quad |\,\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\,|, \quad |\,\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1\,|.$$

In diesem Beispiel gelingt es, die neun Kanten des Fünfflachs durch ebensoviele Grenzsechsecke von dessen Oberfläche in der Weise abzuschneiden, daſs in dem resultierenden vierzehnflächigen Körper — derselbe wird durch die vierte Figur der Tafel II veranschaulicht — fünf den Grenzpolygonen des Fünfflachs isomorphe Flächen isoliert auftreten.

Die Methode, durch welche eine derartige Isolierung der Grenzflächen eines allgemeinen n-flachs mittelst einer seinen $3n - 6$ Kanten entsprechenden Einschaltung von $3n - 6$ Sechsecken stets erreicht werden kann, findet sich in § 24 allgemein entwickelt.

Es mögen hier noch zwei naheliegende Fragen erwähnt werden, deren Erledigung vorerst hat unterbleiben müssen.

1) Unter welchen Bedingungen existieren auf einem allgemeinen Polyeder einfache, also sich selbst nicht durchsetzende Normalpolygone?

2) Wann bestimmen alle $3n - 6$ Kanten eines n-flachs A_n ein einziges allgemeines Normalpolygon?

Wie der Fall des Pentaeders zeigt, schlieſsen diese Fragen einander nicht aus.

Wenn im Folgenden von Kantenpolygonen eines Polyeders die Rede ist, so sind überall da, wo nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, einfache Polygone gemeint.

§ 18. Hexagonoide.

Unter einem Hexagonoide im allgemeinsten Sinne soll jede polyedrische Fläche verstanden werden, deren Grenzpolygone ausschliefslich Sechsecke sind. — Die auf einer solchen Fläche vorhandenen Kantenpolygone

$$P \equiv \mathfrak{p}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{1,r_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,r_i}$$

$$\equiv \mathfrak{q}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{q}_{1,s_1}, \ldots, \mathfrak{q}_{k,1}, \ldots, \mathfrak{q}_{k,s_k} \equiv Q$$

stimmen sämtlich darin überein, dafs ihre ebenen Kantenzüge

$$\mathfrak{p}_{h,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,r_h} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_{h,1}, \ldots, \mathfrak{q}_{h,s_h}$$

höchstens je fünf Kanten zählen. Demgemäfs soll unter Bezug auf die den beiden Auffassungen P, Q eines Kantenpolygones entsprechenden Anzahlen a_h, b_h ihrer h-kantigen ebenen Züge und unter der Bestimmung

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 \gtreqless b_3 + 2b_4 + 3b_5$$

der Ausdruck

$$(a_3 + 2a_4 + 3a_5 = A) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5 = B)$$

als die Charakteristik des Polygones $P \equiv Q$ definiert werden. Diese zunächst scheinbar willkürliche Definition der Charakteristik $C(P)$, sowie die dadurch geschaffene Einteilung der fraglichen Polygone in den verschiedenen Werten von C entsprechende Klassen hat ihren sachlichen und zureichenden Grund in nachstehendem Satze:

Theorem 11. *Je zwei auf einem Hexagonoide H gezogene Polygone R_1 und R_m, welche mit einander durch eine Reihe aufeinanderfolgender Nachbarpolygone verbunden werden können,*

$$R_1, R_2, \ldots, R_{m-1}, R_m,$$

haben die gleiche Charakteristik

$$A_1 - B_1 = A_m - B_m,$$

d. h. sie gehören zu einer und derselben Klasse.

Es genügt augenscheinlich, den Satz unter der Voraussetzung zu beweisen, dafs $R_m \equiv R_2$, also selbst Nachbarpolygon von R_1 ist. Da es ferner in Bezug auf den Satz gleichgiltig ist, an welche Seite von R_1 eine Fläche $\langle \alpha \rangle_6$ angesetzt wird, bleiben rücksichtlich der Ansetzungsweise drei Hauptfälle zu unterscheiden.

I. Hauptfall.

Die Fläche $\langle\alpha\rangle_6$ habe mit dem Polygone R_1 den fünfkantigen Zug gemein,

$$\mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{p}_{k,2},\ \mathfrak{p}_{k,3},\ \mathfrak{p}_{k,4},\ \mathfrak{p}_{k,5},\ \mathfrak{p}_{k,6}\,.$$

Demselben können in R_1 benachbart sein die Züge:

a) $$\mathfrak{q}_{i,1},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{i,\iota-1} \equiv \mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{q}_{i,\iota} \equiv \mathfrak{p}_{k,2}$$

und $$\mathfrak{q}_{l,1} \equiv \mathfrak{p}_{k,5},\ \mathfrak{q}_{l,2} \equiv \mathfrak{p}_{k,6},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{l,\lambda},$$

$$\iota,\ \lambda = 4,\ 5,\ 6;$$

b) $$\mathfrak{q}_{i,1},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{i,\iota} \text{ und } \mathfrak{p}_{l,1} \equiv \mathfrak{p}_{k,6},\ \mathfrak{p}_{l,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{l,\lambda},$$

$$\iota = 4,\ 5,\ 6,\quad \lambda = 3,\ 4;$$

c) $$\mathfrak{p}_{i,1},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{i,\iota} \equiv \mathfrak{p}_{k,1} \text{ und } \mathfrak{p}_{l,1} \equiv \mathfrak{p}_{k,6},\ \mathfrak{p}_{l,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{l,\lambda},$$

$$\iota,\ \lambda = 3.$$

Entsprechend diesen drei Fällen macht die Ersetzung des Zuges

$$\mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{p}_{k,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{k,6}$$

durch den Zug

$$|\,\mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{p}_{k,6}\,|,$$

d. h. der Übergang von dem Polygone R_1 zu dem benachbarten R_2 des ersteren Charakteristik

$$C = (a_3 + 2a_4 + 3a_5 = A_1) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5 = B_1)$$

übergehen in

a) $$C_2 = ((a_3 + 1) + 2\alpha_4 + 3(a_5 - 1))$$
$$- ((\iota-4)-(\iota-3)+b_3+2b_4+3b_5+(\lambda-4)-(\lambda-3))$$
$$= A_1 - B_1 = C_1;$$

b) $$C_2 = ((a_3 + 2a_4 + 3(a_5 - 1) - (\lambda - 3) + (\lambda - 1))$$
$$- ((\iota - 4) - (\iota - 3) + b_3 + 2b_4 + 3b_5))$$
$$= A_1 - B_1 = C_1;$$

c) $$C_2 = (a_3 + 2a_4 + 3(a_5 - 1 + 1)) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5)$$
$$= A_1 - B_1 = C_1\,.$$

II. Hauptfall.

Die Fläche $\langle\alpha\rangle_6$ habe mit dem Polygone R_1 den vierkantigen Zug gemein,

$$\mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{p}_{k,2},\ \mathfrak{p}_{k,3},\ \mathfrak{p}_{k,4},\ \mathfrak{p}_{k,5}\,.$$

Demselben können benachbart sein die Züge:

a) $\mathfrak{q}_{i,1}, \mathfrak{q}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i,\iota}$ und $\mathfrak{q}_{l,1}, \mathfrak{q}_{l,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{l,\lambda}$,
$\iota, \lambda = 4, 5, 6$;

b) $\mathfrak{q}_{i,1}, \mathfrak{q}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i,\iota}$ und $\mathfrak{p}_{l,1}, \mathfrak{p}_{l,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{l,\lambda}$,
$\iota = 4, 5, 6, \quad \lambda = 3, 4, 5$;

c) $\mathfrak{p}_{i,1}, \mathfrak{p}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,\iota}$ und $\mathfrak{p}_{l,1}, \mathfrak{p}_{l,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{l,\lambda}$,
$\iota, \lambda = 3, 4, 5$.

Demgemäfs läfst die Ersetzung des vierkantigen Zuges

$$\mathfrak{p}_{k,1}, \mathfrak{p}_{k,2}, \mathfrak{p}_{k,3}, \mathfrak{p}_{k,4}, \mathfrak{p}_{k,5}$$

durch den zweikantigen Zug

$$\mathfrak{p}_{k,1}, \mathfrak{p}_{x}, \mathfrak{p}_{k,5}$$

die Charakteristik von R_1 übergehen in,

a) $C_2 = (a_3 + 2(a_4 - 1) + 3a_5) -$
$- ((\iota - 4) - (\iota - 3) + b_3 + 2b_4 + 3b_5 + (\lambda - 4) - (\lambda - 3))$
$= A_1 - B_1 = C_1$;

b) $C_2 = (a_3 + 2(a_4 - 1) + 3a_5 - (\lambda - 3) + (\lambda - 2))$
$- ((\iota - 4) - (\iota - 3) + b_3 + 2b_4 + 3b_5)$
$= A_1 - B_1 = C_1$;

c) $C_2 = (-(\iota - 3) + (\iota - 2) + a_3 + 2(a_4 - 1) + 3a_5$
$- (\lambda - 3) + (\lambda - 2)) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5)$
$= A_1 - B_1 = C_1$.

III. Hauptfall.

Die Fläche $\langle\alpha\rangle_6$ habe mit dem Polygone R_1 den dreikantigen Zug gemein,

$$\mathfrak{p}_{k,1}, \mathfrak{p}_{k,2}, \mathfrak{p}_{k,3}, \mathfrak{p}_{k,4}.$$

Demselben können in R_1 benachbart sein die Züge:

a) $\mathfrak{q}_{i,1}, \mathfrak{q}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i,\iota}$ und $\mathfrak{q}_{l,1}, \mathfrak{q}_{l,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{l,\lambda}$,
$\iota, \lambda = 4, 5, 6$;

b) $\mathfrak{q}_{i,1}, \mathfrak{q}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{q}_{i,\iota}$ und $\mathfrak{p}_{l,1}, \mathfrak{p}_{l,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{l,\lambda}$,
$\iota = 4, 5, 6, \quad \lambda = 3, 4, 5$;

c) $\mathfrak{p}_{i,1}, \mathfrak{p}_{i,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{i,\iota}$ und $\mathfrak{p}_{l,1}, \mathfrak{p}_{l,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{l,\lambda}$,
$\iota, \lambda = 3, 4, 5$.

Dann verwandelt die Ersetzung des dreikantigen Zuges

$$\mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{p}_{k,2},\ \mathfrak{p}_{k,3},\ \mathfrak{p}_{k,4}$$

durch den dreikantigen Zug

$$\mathfrak{p}_{k,1},\ \mathfrak{p}'_{k,2},\ \mathfrak{p}'_{k,3},\ \mathfrak{p}_{k,4}$$

die Charakteristik C_1 von R_1 in:

a) $C_2 = ((a_3 - 1) + 2a_4 + 3a_5)$
$- (+(\iota - 4) - (\iota - 3) + (1 + b_3) + 2b_4 + 3b_5 + (\lambda - 4) - (\lambda - 3))$
$= A_1 - B_1 = C_1'$,

b) $C_2 = (a_3 - 1 + 2a_4 + 3a_5 - (\lambda - 3) + (\lambda - 2))$
$- (+(\iota - 4) - (\iota - 3) + (1 + b_3) + 2b_4 + 3b_5)$
$= A_1 - B_1 = C_1$,

c) $C_2 = (+(\iota - 2) - (\iota - 3) + a_3 - 1 + 2a_4 + 3a_5 + (\lambda - 2) - (\lambda - 3))$
$- ((1 + b_3) + 2b_4 + 3b_5) = A_1 - B_1 = C_1$. Q. e. d.

Der oben behauptete und hiermit bewiesene Satz in Verbindung mit der Bemerkung, dafs die freie Berandung eines an ein c-kantiges ebenes Polygon $\langle\alpha\rangle_c$ angesetzten, aus c Sechsecken bestehenden Elementarstreifens durch die Daten charakterisiert wird,

$$a_4 = a_5 = 0 = b_4 = b_5,$$
$$a_3 = c,\quad b_3 = 0,$$

somit dessen Charakteristik

$$C = (a_3 + 2a_4 + 3a_5) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5)$$

den Wert c hat, führt zu dem weiteren Satze:

Setzt man an ein c-kantiges ebenes Polygon $\langle\alpha\rangle_c$ einen ersten, an dessen freien Rand einen zweiten Elementarstreifen an, und so fort, und zieht man auf dem entstehenden zur Grundfläche $\langle\alpha\rangle_c$ gehörigen Hexagonoide H_c ein solches Polygon P, welches mit der Grundfläche $\langle\alpha\rangle_c$ zusammen die beiden Randpolygone eines Gürtels $G\langle 6\rangle$ bildet, so hat die Charakteristik dieses Polygones

$$C = (a_3 + 2a_4 + 3a_5) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5)$$

allemal den Wert $+c$.

Unter den Hexagonoiden mit ebener Grundfläche sind diejenigen, bei welchen die Kantenzahl letzterer ein Vielfaches der Zahl 6 ist, noch durch eine zweite allgemeine Eigenschaft

ihrer Kantenpolygone ausgezeichnet. Bevor jedoch hierauf näher eingegangen werden kann, sind einige Hilfsbetrachtungen erforderlich.

Um die Vorstellung eines Hexagonoides H_c zu präcisieren, denke man sich dasselbe von seiner Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ aus in sich aneinander setzende Elementarstreifen zerlegt:

$$\begin{aligned} H_c &\equiv \langle\alpha_0\rangle_6,\ S',\ S'',\ \ldots,\ S^{(a)},\ \ldots,\\ S' &\equiv \langle\alpha_1'\rangle_6,\ \langle\alpha_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_{c-1}'\rangle_6,\ \langle\alpha_c'\rangle_6,\\ S'' &\equiv \langle\alpha_1''\rangle_6,\ \langle\alpha_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_{2c-1}''\rangle_6,\ \langle\alpha_{2c}''\rangle_6,\\ S''' &\equiv \langle\alpha_1'''\rangle_6,\ \langle\alpha_2'''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_{3c-1}'''\rangle_6,\ \langle\alpha_{3c}'''\rangle_6,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

wo einerseits die gegenseitige Lage der Flächen

$$\langle\alpha_0\rangle_6,\ \langle\alpha_1'\rangle_6,\ \langle\alpha_1''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_1^{(h-1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_1^{(h)}\rangle_6,\ \langle\alpha_1^{(h+1)}\rangle_6,\ \ldots$$

durch die Bedingung bestimmt ist, dafs eine beliebige Fläche

$$\langle\alpha_1^{(h)}\rangle_6$$

von den beiden benachbarten Flächen

$$\langle\alpha_1^{(h-1)}\rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle\alpha_1^{(h+1)}\rangle_6$$

in gegenüberliegenden Seiten gekantet wird, und wo andererseits die Flächen eines Streifens in derjenigen Folge gezählt sind, in welcher sie einem Beobachter erscheinen, der bei einem Umlauf des Polygones (S^{h-1}, S^h) den Streifen $S^{(h-1)}$ zur Rechten, den Streifen $S^{(h)}$ zur Linken liegen hat.

Addiert man, unter λ eine positive ganze Zahl kleiner als c verstanden, zu den unteren Indices der $h \cdot c$ Flächen des h-ten Streifens

$$S^{(h)} \equiv \langle\alpha_1^{(h)}\rangle,\ \langle\alpha_2^{(h)}\rangle,\ \langle\alpha_3^{(h)}\rangle,\ \ldots,\ \langle\alpha_{hc-1}^{(h)}\rangle,\ \langle\alpha_{hc}^{(h)}\rangle$$

durchweg den Wert $h \cdot \lambda$

$$S^{(h)} \equiv \langle\alpha_{1+h\lambda}^{(h)}\rangle,\ \langle\alpha_{2+h\lambda}^{(h)}\rangle,\ \langle\alpha_{3+h\lambda}^{(h)}\rangle,\ \ldots,\ \langle\alpha_{hc+h\lambda-1}^{(h)}\rangle,\ \langle\alpha_{hc+h\lambda}^{(h)}\rangle,$$

schreibt darauf allgemein

$$\langle\alpha_{i+h\lambda}^{(h)}\rangle \equiv \langle\beta_{i'}^{(h)}\rangle,$$

wo, falls $i + h\lambda$ den Wert hc übersteigt,

$$i' = i + h\lambda - hc \cdot \left[\frac{i + h\lambda}{hc}\right],$$

so nimmt das Hexagonoid H_c die isomorphe Form an:

$$H_c \equiv \langle\alpha_0\rangle_6,\ S',\ S'',\ S''',\ \ldots,$$
$$S' \equiv \langle\beta_1'\rangle,\ \langle\beta_2'\rangle,\ \langle\beta_3'\rangle,\ \ldots,\ \langle\beta_c'\rangle,$$
$$S'' \equiv \langle\beta_1''\rangle,\ \langle\beta_2''\rangle,\ \langle\beta_3''\rangle,\ \ldots,\ \langle\beta_{2c-1}''\rangle,\ \langle\beta_{2c}''\rangle,$$
$$S''' \equiv \langle\beta_1'''\rangle,\ \langle\beta_2'''\rangle,\ \langle\beta_3'''\rangle,\ \ldots,\ \langle\beta_{3c-1}'''\rangle,\ \langle\beta_{3c}'''\rangle,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Den $c - 1$ möglichen Werten von λ entsprechend erhält man so $c-1$ der ursprünglichen isomorphe Darstellungen von H_c, d. h.:

Ein Hexagonoid H_c mit c-kantiger Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ ist sich selbst c-mal isomorph.

Aus dieser Eigenschaft schliefst man unmittelbar weiter: *Ist ein auf H_c gegebenes Polygon $P(c, m)$ sich selbst c_1-mal isomorph, so ist c_1 notwendig ein Teiler von c, und es giebt auf H_c noch mindestens $\frac{c}{c_1} - 1$ von einander verschiedene mit $P(c, m)$ isomorphe Polygone.*

Es drängt sich hier unwillkürlich die Frage auf: Giebt es auf einem Hexagonoide H_c zu einem sich selbst c_1-mal isomorphen Polygone $P(c, m)$ nur die vorerwähnten $\frac{c}{c_1} - 1$ isomorphen Polygone, oder können aufser diesen noch andere vorkommen, und wie viele?

Da das gemeinsame Randpolygon $P^{(a)}$ zweier Elementarstreifen $S^{(a)}$ und $S^{(a+1)}$ sich selbst c-mal isomorph ist, so ist die Frage im wesentlichen gleichbedeutend mit der anderen:

Wie viele verschiedene Polygone $Q^{(a)}$ auf H_c sind dem Polygone $P^{(a)}$ isomorph?

Angenommen, es gäbe in der That ein Polygon $Q^{(a)}$, so kann man voraussetzen, dafs dasselbe mit dem Grundpolygone $\langle\alpha_0\rangle_c$ entweder einen ein-, oder einen zwei-, oder einen dreikantigen ebenen Zug gemein hat. Anderenfalls müfste in der Reihe der den Polygonen

$$P^{(a)},\ P^{(a-1)},\ P^{(a-2)},\ \ldots,\ P',\ \langle\alpha_0\rangle$$

isomorphen Polygone

$$Q^{(a)},\ Q^{(a-1)},\ Q^{(a-2)},\ \ldots,\ Q',\ \langle\alpha_0\rangle$$

ein erstes Polygon $Q^{(a_1)}$ auftreten, welches die besagte Eigenschaft hätte, und dann wäre statt des Paares $P^{(a)}$, $Q^{(a)}$ das andere $P^{(a_1)}$, $Q^{(a_1)}$ zu betrachten.

Aus der ersten Annahme, dafs das Polygon $Q^{(a)}$ mit der

Fläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ nur eine Kante $|\,\alpha_0, \alpha_1'\,|$ gemein hat, folgt, dafs $Q^{(a)}$ drei aufeinander folgende Kanten der Fläche $\langle\alpha_1'\rangle_6$ enthält, nämlich die Kanten

$$|\,\alpha_1', \alpha_c'\,|, \quad |\,\alpha_1', \alpha_0\,|, \quad |\,\alpha_1', \alpha_2'\,|\,.$$

Alsdann fällt aber $Q^{(a)}$ notwendig in dasjenige Polygon $R^{(a)}$, welches den a-ten Elementarstreifen des zu dem Sechseck $\langle\alpha_1^{(a+1)}\rangle_6$ gehörigen Hexagonoides H_6 berandet. Also giebt es zu dem Polygone $P^{(a)}$ *nur in dem Falle* $c = 6$ isomorphe Polygone $Q^{(a)}$, dann aber zu jeder Fläche

$$\langle\alpha_i^{(h)}\rangle_6 \quad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

je ein solches Polygon. Angenommen zweitens, das Polygon $Q^{(a)}$ habe mit der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ den zweikantigen Zug gemein,

$$|\,\alpha_0, \alpha_c'\,|, \quad |\,\alpha_0, \alpha_1'\,|\,,$$

und es liegen zwischen diesem und dem ersten dreikantigen ebenen Zuge noch $a_1 \leqq a - 2$ gleichartige Züge, so hat $Q^{(a)}$ notwendig den Verlauf:

$$Q^{(a)} \equiv |\,\alpha_0, \alpha_c'\,|, \quad |\,\alpha_0, \alpha_1'\,|; \quad |\,\alpha_2', \alpha_1'\,|, \quad |\,\alpha_2', \alpha_2''\,|, \quad |\,\alpha_3'', \alpha_2''\,|,$$

$$|\,\alpha_3'', \alpha_3'''\,|, \ldots, \quad |\,\alpha_{a_1+1}^{(a_1)}, \alpha_{a_1}^{(a_1)}\,|, \quad \alpha_{a_1+1}^{(a_1)}, \alpha_{a_1+1}^{(a_1+1)}\,|; \quad |\,\alpha_{a_1+2}^{(a_1+1)}, \alpha_{a_1+1}^{(a_1+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{a_1+2}^{(a_1+1)}, \alpha_{a_1+2}^{(a_1+2)}\,|, \quad |\,\alpha_{a_1+2}^{(a_1+1)}, \alpha_{a_1+3}^{(a_1+2)}\,|; \quad |\,\alpha_{a_1+4}^{(a_1+2)}, \alpha_{a_1+3}^{(a_1+2)}\,|, \quad |\,\alpha_{a_1+4}^{(a_1+2)}, \alpha_{a_1+5}^{(a_1+3)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{a_1+6}^{(a_1+3)}, \alpha_{a_1+5}^{(a_1+3)}\,|, \quad |\,\alpha_{a_1+6}^{(a_1+3)}, \alpha_{a_1+7}^{(a_1+4)}\,|, \quad \ldots, \quad |\,\alpha_{2a+a_1}^{(a+a_1)}, \alpha_{2a+a_1-1}^{(a+a_1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{2a+a_1}^{a+a_1}, \alpha_{2a+a_1+1}^{(a+a_1+1)}\,|; \quad |\,\alpha_{2a+a_1+2}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+1}^{(a+a_1+1)}\,|, \quad |\,\alpha_{2a+a_1+2}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+3}^{(a+a_1+2)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{2a+a_1+2}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+4}^{(a+a_1+2)}\,|; \quad |\,\alpha_{2a+a_1+3}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+4}^{(a+a_1+2)}\,|, \quad |\,\alpha_{2a+a_1+3}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+5}^{(a+a_1+2)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{2a+a_1+4}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+5}^{(a+a_1+2)}\,|, \quad |\,\alpha_{2a+a_1+4}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+a_1+6}^{(a+a_1+2)}\,|, \quad \ldots,$$

$$|\,\alpha_{2(a+a_1+1)}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2a+2a_1+3}^{(a+a_1+2)}\,|, \quad |\,\alpha_{2(a+a_1+1)}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2(a+a_1+2)}^{(a+a_1+2)}\,|;$$

$$|\,\alpha_{1+2(a+a_1+1)}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{2(a+a_1+2)}^{(a+a_1+2}\,|, \quad |\,\alpha_{1+2(a+a_1+1)}^{(a+a_1+1)}, \alpha_{1+2(a+a_1+2)}^{(a+a_1+2)}\,|;$$

$$|\,\alpha_{2+2(a+a_1+2)}^{(a+a_1+2)}, \alpha_{1+2(a+a_1+2)}^{(a+a_1+2)}\,|, \quad |\,\alpha_{2+2(a+a_1+2)}^{(a+a_1+2)}, \alpha_{2+2(a+a_1+3)}^{(a+a_1+3)}\,|, \ldots,$$

$$|\,\alpha_{5a-a_1-3}^{(2a-1)}, \alpha_{5a-a_1-4}^{(2a-1)}\,|, \quad |\,\alpha_{5a-a_1-3}^{(2a-1)}, \alpha_{5a-a_1-1}^{(2a)}\,|; \quad |\,\alpha_{5a-a_1}^{(2a)}, \alpha_{5a-a_1-1}^{(2a)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{5a-a_1}^{(2a)}, \alpha_{5a-a_1+2}^{(2a+1)}\,|, \quad |\,\alpha_{5a-a_1}^{(2a)}, \alpha_{5a-a_1+3}^{(2a+1)}\,|; \quad |\,\alpha_{5a-a_1+1}^{(2a)}, \alpha_{5a-a_1+3}^{(2a+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{5a-a_1+1}^{(2a)}, \alpha_{5a-a_1+4}^{(2a+1)}\,|, \quad \ldots, \quad |\,\alpha_{6a-a_1-1}^{(2a)}, \alpha_{6a-a_1+1}^{(2a+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{6a-a_1-1}^{(2a)}, \alpha_{6a-a_1+2}^{(2a+1)}\,|; \quad |\,\alpha_{6a-a_1}^{(2a)}, \alpha_{6a-a_1+2}^{(2a+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_{6a-a_1}^{(2a)}, \alpha_{6a-a_1+3}^{2a+1}\,|, \quad |\,\alpha_{6a-a_1}^{(2a)}, \alpha_{6a-a_1+1}^{(2a)}\,|,$$

. . . .

Das vorstehende Schema zeigt, dafs, wenn in $Q^{(a)}$ auf den Zug $|\alpha_0, \alpha_c'|$, $|\alpha_0, \alpha_1'|$ noch genau a_1 zweikantige Züge folgen, der dritte dreikantige ebene Zug

$$\left|\alpha^{(2a)}_{5a-a_1}, \alpha^{(2a)}_{5a-a_1-1}\right|, \left|\alpha^{(2a)}_{5a-a_1}, \alpha^{(2a+1)}_{5a-a_1+2}\right|, \left|\alpha^{(2a)}_{5a-a_1}, \alpha^{(2a+1)}_{5a-a_1+3}\right|$$

einer Fläche $\langle\alpha^{(2a)}_{5a-a_1}\rangle$ des $2a$-ten Elementarstreifens angehört, welche, zwischen den Flächen $\langle\alpha^{(2a)}_{1+4a}\rangle$ und $\langle\alpha^{(2a)}_{1+6a}\rangle$ gelegen, von ersterer durch $a - a_1 - 2$ Flächen des Streifens getrennt ist.

Entsprechend wird man daher zu dem vierten dreikantigen ebenen Zuge

$$\left|\alpha^{(2a)}_{6a-a_1}, \alpha^{(2a)}_{6a-a_1+1}\right|, \left|\alpha^{(2a)}_{6a-a_1}, \alpha^{(2a+1)}_{6a-a_1+3}\right|, \left|\alpha^{(2a)}_{6a-a_1}, \alpha^{(2a+1)}_{6a-a_1+2}\right|,$$

dessen Fläche $\langle\alpha^{(2a)}_{6a-a_1}\rangle$ von der Fläche $\langle\alpha^{(2a)}_{1+6a}\rangle$ durch a_1 Sechsecke des Streifens $S^{(2a)}$ geschieden ist, dadurch gelangen, dafs man auf den Zug

$$|\alpha_0, \alpha_7'|, |\alpha_0, \alpha_6'|$$

zunächst $a - a_1 - 2$ gleichartige und dann einen ersten dreikantigen ebenen Zug folgen läfst, d. h.:

Setzt man das Polygon $Q^{(a)}$ über den vierten dreikantigen ebenen Zug fort, so fällt der auf den fünften dreikantigen ebenen Zug folgende $(a - a_1 - 1)$-te zweikantige Zug mit dem Zuge $|\alpha_0, \alpha_6'|$, $|\alpha_0, \alpha_7'|$ zusammen.

Da nun dieser Umstand für jeden Wert von a_1 eintritt,

$$a_1 = 0, 1, 2, \ldots, a-2,$$

da ferner der Kantenzug

$$|\alpha_0, \alpha_1'|, |\alpha_2', \alpha_1'|, \ldots, |\alpha_5', \alpha_6'|, |\alpha_0, \alpha_6'|$$

und jeder folgende isomorphe Zug

$$|\alpha_0, \alpha_7'|, |\alpha_8', \alpha_7'|, \ldots, |\alpha_{11}', \alpha_{12}'|, |\alpha_0, \alpha_{12}'|,$$

. . . .

genau sechs dreikantige ebene Züge aufweist, so schliefst man unmittelbar den Satz:

Ist die Anzahl c der Seiten der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle$ eines Hexagonoides H_c ein Vielfaches der Zahl 6, so giebt es auf H_c zu einem Polygone $P^{(a)}$ noch genau $6(a-1)$ isomorphe sich

selbst nicht durchsetzende Polygone $Q^{(a)}$ von der Beschaffenheit, dafs ein jedes derselben mit der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ genau $\frac{c}{6}$ zweikantige Züge gemein hat.

Ist dagegen c von einer der Formen

$$1)\ c = 6c' + 1,\ 6c' + 5,\quad 2)\ c = 6c' + 2,\ 6c' + 4,$$
$$3)\ c = 6c' + 3,$$

so giebt es auf H_c zwar kein Polygon $Q^{(a)}$, aber es existieren

$$1)\ a - 1,\quad 2)\ 2(a - 1),\quad 3)\ 3(a - 1)$$

aus

$$1)\ \text{je } 6,\qquad 2)\ \text{je } 3,\qquad 3)\ \text{je } 2$$

getrennten, zu $P^{(a)}$ isomorphen Zügen bestehende Polygone, welche mit der Grundfläche

$$1)\ \text{je } c,\qquad 2)\ \text{je } \frac{c}{2},\qquad 3)\ \text{je } \frac{c}{3}$$

zweikantige Züge gemein haben, und deren einzelne Züge $Q^{(a)}$ sich selbst je einmal durchsetzen.

Soll endlich das mit $P^{(a)}$ isomorphe Polygon $Q^{(a)}$ einen dreikantigen Zug der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ enthalten, etwa den Zug

$$|\alpha_0, \alpha_1'|,\ |\alpha_0, \alpha_2'|,\ |\alpha_0, \alpha_3'|,$$

so ist der Verlauf des Polygones folgender:

$$Q^{(a)} \equiv |\alpha_0, \alpha_1'|,\ |\alpha_0, \alpha_2'|,\ |\alpha_0, \alpha_3'|;\ |\alpha_4', \alpha_3'|,\ |\alpha_4', \alpha_6''|,$$
$$|\alpha_7'', \alpha_6''|,\ |\alpha_7'', \alpha_9'''|,\ \ldots,\ |\alpha_{3a-2}^{(a-1)}, \alpha_{3a-3}^{(a-1)}|,\ |\alpha_{3a-2}^{(a-1)}, \alpha_{3a}^{(a)}|;$$
$$|\alpha_{3a+1}^{(a)}, \alpha_{3a}^{(a)}|,\ |\alpha_{3a+1}^{(a)}, \alpha_{3a+3}^{(a+1)}|,\ |\alpha_{3a+1}^{(a)}, \alpha_{3a+4}^{(a+1)}|;\ |\alpha_{3a+5}^{(a+1)}, \alpha_{3a+4}^{(a+1)}|,$$
$$|\alpha_{3a+6}^{(a+1)}, \alpha_{3a+8}^{a+2}|,\ |\alpha_{3a+9}^{(a+2)}, \alpha_{3a+8}^{(a+2)}|,\ |\alpha_{3a+9}^{(a+2)}, \alpha_{3a+12}^{(a+3)}|,\ \ldots,$$
$$|\alpha_{7a-3}^{(2a-1)}, \alpha_{7a-4}^{(2a-1)}|,\ |\alpha_{7a-3}^{(2a-1)}, \alpha_{7a}^{(2a)}|;\ |\alpha_{7a+1}^{(2a)}, \alpha_{7a}^{(2a)}|,\ |\alpha_{7a+1}^{(2a)}, \alpha_{7a+4}^{(2a+1)}|,$$
$$|\alpha_{7a+1}^{(2a)}, \alpha_{7a+6}^{(2a+1)}|;\ |\alpha_{7a+2}^{(2a)}, \alpha_{7a+5}^{(2a+1)}|,\ |\alpha_{7a+2}^{(2a)}, \alpha_{7a+6}^{(2a+1}|,$$
$$|\alpha_{7a+3}^{(2a)}, \alpha_{7a+6}^{(2a+1)}|,\ |\alpha_{7a+3}^{(2a)}, \alpha_{7a+7}^{(2a+1)}|,\ \ldots,\ |\alpha_{8a}^{(2a)}, \alpha_{8a+3}^{(2a+1)}|,$$
$$|\alpha_{8a}^{(2a)}, {}_{8a+4}^{(2a+1)}|;\ |\alpha_{8a+1}^{(2a)}, \alpha_{8a+4}^{(2a+1)}|,\ |\alpha_{8a+1}^{(2a)}, \alpha_{8a+5}^{(2a+1)}|,\ |\alpha_{8a+1}^{(2a)}, \alpha_{8a+6}^{(2a+1)}|,$$

. . . .

Berücksichtigt man aber, dafs der zuletzt angegebene dreikantige Zug dem Polygone $P^{(2a)}$ angehört,

$$P^{(2a)} \equiv |\alpha_1^{(2a)}, \alpha_{(2a+1)c}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_1^{(2a)}, \alpha_1^{(2a+1)}|, \ |\alpha_1^{(2a)}, \alpha_2^{(2a+1)}|, \ldots,$$
$$|\alpha_{2a+1}^{(2a)}, \alpha_{2a+1}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{2a+1}^{(2a)}, \alpha_{2a+2}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{2a+1}^{(2a)}, \alpha_{2a+3}^{(2a+1)}|, \ldots,$$
$$|\alpha_{4a+1}^{(2a)}, \alpha_{4a+2}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{4a+1}^{(2a)}, \alpha_{4a+3}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{4a+1}^{(2a)}, \alpha_{4a+4}^{(2a+1)}|, \ldots,$$
$$|\alpha_{6a+1}^{(2a)}, \alpha_{6a+3}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{6a+1}^{(2a)}, \alpha_{6a+4}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{6a+1}^{(2a)}, \alpha_{6a+5}^{(2a+1)}|, \ldots,$$
$$|\alpha_{8a+1}^{(2a)}, \alpha_{8a+4}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{8a+1}^{(2a)}, \alpha_{8a+5}^{(2a+1)}|, \ |\alpha_{8a+1}^{(2a)}, \alpha_{8a+6}^{(2a+1)}|, \ldots,$$

und dafs der ganze vorhergehende Teil von $Q^{(a)}$ in die zwischen den beiden Flächenstreifen

$$\langle\alpha_3'\rangle, \ \langle\alpha_5''\rangle, \ \langle\alpha_7'''\rangle, \ \langle\alpha_9^{(4)}\rangle, \ \ldots \quad \text{und}$$
$$\langle\alpha_5'\rangle, \ \langle\alpha_9''\rangle, \ \langle\alpha_{13}'''\rangle, \ \langle\alpha_{17}^{(4)}\rangle, \ \ldots$$

liegende Fläche des Hexagonoides H_c fällt, so schliefst man aus der Symmetrie des Polygones $Q^{(a)}$ und der des Hexagonoides, dafs der nachfolgende dem ersten isomorphe Teil von $Q^{(a)}$ innerhalb der zwischen den beiden Streifen

$$\langle\alpha_5'\rangle, \ \langle\alpha_9''\rangle, \ \langle\alpha_{13}'''\rangle, \ \langle\alpha_{17}^{(4)}\rangle, \ \ldots \quad \text{und}$$
$$\langle\alpha_7'\rangle, \ \langle\alpha_{13}''\rangle, \ \langle\alpha_{19}'''\rangle, \ \langle\alpha_{25}^{(4)}\rangle, \ \ldots$$

liegenden Fläche verläuft und in dem Kantenzuge endet,

$$|\alpha_0, \alpha_7'|, \ |\alpha_0, \alpha_8'|, \ |\alpha_0, \alpha_9'|.$$

Wenn also der erste dreikantige ebene Zug eines dem Polygone $P^{(a)}$ isomorphen Polygones $Q^{(a)}$ mit einem Zuge der Grundfläche coincidiert, etwa mit dem Zuge

$$|\alpha_0, \alpha_1'|, \ |\alpha_0, \alpha_2'|, \ |\alpha_0, \alpha_3'|,$$

so fällt der siebente dreikantige ebene Zug gleichfalls in einen Zug der Grundfläche, und zwar in den Zug

$$|\alpha_0, \alpha_7'|, \ |\alpha_0, \alpha_8'|, \ |\alpha_0, \alpha_9'|.$$

Aus dieser Beziehung folgt wieder der Satz:

Ist die Anzahl c der Seiten der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle$ eines Hexagonoides H_c ein Vielfaches der Zahl 6, so giebt es zu einem Polygone $P^{(a)}$ noch genau sechs verschiedene sich selbst nicht durchsetzende Polygone $Q^{(a)}$, so zwar, dafs jedes derselben mit der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_c$ genau $\frac{c}{6}$ dreikantige Züge gemein hat.

Ist dagegen c von einer der Formen

$$1)\ c = 6c' + 1,\ 6c' + 5,\quad 2)\ c = 6c' + 2,\ 6c' + 4,$$
$$3)\ c = 6c' + 3,$$

so giebt es auf H_c zwar kein Polygon $Q^{(a)}$, aber es existieren

1) *ein*, 2) *zwei*, 3) *drei*

aus

1) *sechs*, 2) *drei*, 3) *zwei*

getrennten, zu $P^{(a)}$ isomorphen Zügen bestehende Polygone, welche mit der Grundfläche

$$1)\ je\ c,\qquad 2)\ je\ \frac{c}{2},\qquad 3)\ je\ \frac{c}{3}$$

dreikantige Züge gemein haben, und deren einzelne Züge $Q^{(a)}$ sich selbst je einmal durchsetzen.

Indem man die bisherigen Ergebnisse mit der Bemerkung verbindet, dafs in dem Falle $c = 6c'$ einem dem Polygone $P^{(a-h)}$ isomorphen Polygone $Q^{(a-h)}$ in dem Abstande von a Elementarstreifen ein dem Polygone $P^{(a)}$ isomorphes Polygon $P_1^{(a)}$ entspricht, schliefst man den Satz:

Theorem 12. *Auf einem Hexagonoide H_c giebt es, je nachdem c ein Vielfaches der Zahl 6 ist, oder nicht, zu einem Polygone $P^{(a)}$ entweder*

$$6(1 + 2 + 3 + \cdots + a) = 3a \cdot (a + 1)$$

und in dem einen Falle $c = 6$ unendlich viele isomorphe Polygone $P_1^{(a)}$, oder nur offene (zweiendige) sich selbst je einmal durchsetzende isomorphe Kantenzüge.

Dies vorausgeschickt, nehme man jetzt auf einem Hexagonoide H_c erster Art — $c = 6c'$ — zwei Polygone der Charakteristik c an,

$$P(c, m) \equiv \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{p}_m,\ \mathfrak{p}_1,$$
$$Q(c, n) \equiv \cdots,\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_m,\ \mathfrak{q}_{m+1},\ \ldots,$$

von denen das erste als dem Kantenzuge

$$\overline{Q} \equiv \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{q}_m,\ \mathfrak{q}_{m+1}$$

des zweiten isomorph vorausgesetzt wird, und wo je zwei Kanten desselben Polygones als discret angenommen sind. Von jeder Ecke $\mathfrak{x}$ des Hexagonoides geht mit einer Kante auch eine links- und eine rechtsseitige Folge von Gegenkanten aus,

$$Z_{\mathfrak{x}} \equiv |\,\mathfrak{x},\ \mathfrak{x}_1\,|,\ \ |\,\mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{x}_3\,|,\ \ldots,$$

welche, wenn $\mathfrak{x}$ eine *Ecke* $(\alpha_i^{(h)}, \alpha_k^{(h+1)}, \alpha_{k\pm 1}^{(h+1)})$, und $|\alpha_k^{(h+1)}, \alpha_{k\pm 1}^{(h+1)}|$ die erste Kante *ist*, sich durch die Elementarstreifen $S^{(h+1)}$, $S^{(h+2)}$, ... hinziehen. Bestimmt man nun zu den Ecken

$$\mathfrak{p}_1 \equiv \mathfrak{p}_{m+1}, \ \mathfrak{q}_1, \ \mathfrak{q}_{m+1}$$

solche drei Kanten

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}_2|, \quad |\mathfrak{q}_1, \mathfrak{y}_2|, \quad |\mathfrak{q}_{m+1}, \mathfrak{z}_2|,$$

dafs die Züge

$$\ldots, \mathfrak{p}_3, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}_2 \quad \text{und} \quad \ldots, \mathfrak{p}_{m-1}, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_{m+1}, \mathfrak{x}_2$$

resp. isomorph sind den Zügen

$$\ldots, \mathfrak{q}_3, \mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1, \mathfrak{y}_1 \quad \text{und} \quad \ldots, \mathfrak{q}_{m-1}, \mathfrak{q}_m, \mathfrak{q}_{m+1}, \mathfrak{z}_2,$$

konstruiert darauf entsprechend den zu diesen Kanten gehörigen links- oder rechtsseitigen Gegenkantenfolgen die isomorphen Kantenzüge

$$Z_{\mathfrak{p}_1} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4, \ldots, \quad Z_{\mathfrak{q}_1} \equiv \mathfrak{q}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \mathfrak{y}_4, \ldots,$$
$$Z_{\mathfrak{q}_{m+1}} \equiv \mathfrak{q}_{m+1}, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4, \ldots,$$

die Kante $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}_2|$, unbeschadet der Allgemeinheit von $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|$ und $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_m|$ verschieden gedacht, so sind zwei Möglichkeiten denkbar:

1) entweder schneidet der Zug $Z_{\mathfrak{p}_1}$ das Polygon $P(c, m)$ in zwei oder mehreren (2μ) Kantenzügen

$$|\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}| \equiv |\mathfrak{p}_g, \mathfrak{p}_{g+1}|, \ldots, \quad |\mathfrak{x}_k, \mathfrak{x}_{k+1}| \equiv |\mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_{h+1}|, \ldots,$$

2) oder er verläuft ganz aufserhalb des Polygones.

Der erste Fall ist leicht auf den zweiten zurückzuführen. — Denn bildet das Polygon

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots, \mathfrak{x}_{i-1}, \mathfrak{x}_i \equiv \mathfrak{p}_h, \mathfrak{p}_{h-1}, \mathfrak{p}_{h-2}, \ldots, \mathfrak{p}_1$$

die Berandung einer endlichen Fläche, so wird der Kantenzug

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{h-1}, \mathfrak{q}_h$$

notwendig durch den anderen

$$\mathfrak{q}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \ldots, \mathfrak{y}_{i-1}, \mathfrak{y}_i \equiv \mathfrak{q}_h$$

zu einem isomorphen Polygone geschlossen, d. h. es fällt die Kante $|\mathfrak{y}_i, \mathfrak{y}_{i+1}|$ auf die Kante $|\mathfrak{q}_h, \mathfrak{q}_{h+1}|$. Indem man daher in $P(c, m)$ und in $Q(c, n)$ die Züge

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_h \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_h$$

durch die anderen ersetzt,

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots, \mathfrak{x}_i \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3, \ldots, \mathfrak{y}_i,$$

kann man die resultierenden Gebilde $P_1(c, m_1)$ und $Q_1(c, n_1)$ in analoger Weise auf die Gebilde $P_2(c, m_2)$ und $Q_2(c, n_2)$, und diese weiter entsprechend reducieren, bis man zwei Gebilde $P_r(c, m_r)$ und $Q_r(c, n_r)$ der durch den zweiten Fall vorgesehenen Form erhält.

Unter der gleichen Annahme schon für $P(c, m)$ und $Q(c, n)$ bestimme man in der Reihe

$$P'(c, 3c), \quad P''(c, 5c), \quad P'''(c, 7c), \ldots$$

das letzte Polygon $P^{(a)}(c, (2a+1)c)$, welches mit $P(c, m)$ noch einen Kantenzug gemein hat, und suche diejenige Ecke $\mathfrak{x}_\lambda$, in welcher der Zug $Z_{\mathfrak{p}_1}$ in dasselbe Polygon eintritt. Gemäſs dem Isomorphismus der einerseits von dem Polygone $P(c, m)$ und dem Zuge $Z_{\mathfrak{p}_1} \equiv Z_{\mathfrak{p}_{m+1}}$, andererseits von der Linie $\overline{Q}$ und den Zügen $Z_{\mathfrak{q}_1}$, $Z_{\mathfrak{q}_{m+1}}$ berandeten zwei Flächen kann man auf der letzteren von der Ecke $\mathfrak{y}_\lambda$ aus einen, dem Polygone $P^{(a)}$ isomorphen, sich selbst nicht durchsetzenden Zug $Q^{(a)}$ nach der Ecke $\mathfrak{z}_\lambda$ ziehen. Nach Früherem existieren aber auf einem Hexagonoide $H_{6c'}$ zu einem Polygone $P^{(a)}$ nur sich schlieſsende isomorphe Kantenzüge $Q^{(a)}$, also folgt, daſs die ursprüngliche Annahme unzulässig ist, und mithin die Ecken $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_{m+1}$ identisch sind. Man schlieſst daraus als Ergänzung des Theoremes 12:

12a. *Von zwei auf einem Hexagonoide $H_{6c'}$ gegebenen sich selbst nicht durchsetzenden Polygonen der Charakteristik $6c'$ kann das eine nicht einem Teile des anderen isomorph sein;*

oder, wie kürzer gesagt werden soll:

Die einfachen Polygone $P(6c', m)$ eines Hexagonoides $H_{6c'}$ sind irreducibel.

Dieser Satz involviert folgende Definition:

Ein höchstens fünfkantige ebene Züge enthaltendes Kantenpolygon der Charakteristik $c = 6c'$ heiſst irreducibel, wenn jede isomorphe Abbildung irgend eines Zuges desselben auf

ein Hexagonoid $H_{6c'}$, mit ebener Grundfläche $\langle \alpha_0 \rangle_{6c'}$ wieder ein offener sich selbst nicht durchsetzender Kantenzug ist.

Nach § 12 wird die Anzahl m der Kanten eines höchstens fünfkantige ebene Züge enthaltenden Polygones gegeben durch:

$$m = b_3 + 2b_4 + 3b_5 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5,$$

und folglich für ein Polygon $P(c, m)$ mit der Charakteristik

$$C(P) = c$$

durch:

$$m = c + 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + 2(b_3 + 2b_4 + 3b_5).$$

Danach ist die Gröfse $m - c$ allemal eine positive und paare Zahl:

$$m - c = 2m'.$$

Vorausgesetzt nun, es sei für alle *irreducibelen* Polygone $P(6, m)$ der Charakteristik $c = 6$ mit nicht mehr als $m = 6 + 2m'$ Kanten nachgewiesen, dafs zu jedem von ihnen auf dem zu einer ebenen Grundfläche $\langle \alpha \rangle_6$ gehörigen Hexagonoide H_6 mindestens ein isomorphes Polygon $P'(6, m)$ existiert. — Wenn dann $P(6, m_1)$ ein irreducibeles Polygon der Charakteristik $c = 6$ mit $m_1 = 6 + 2m' + 2$ Kanten darstellt, für welches mindestens eine der beiden Zahlen a_4, a_5 den Wert 0 übersteigt, welches also mindestens einen vier- oder einen fünfkantigen ebenen Zug enthält,

$$P(6, m_1) \equiv \cdots, \mathfrak{p}_g, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,2}, \mathfrak{p}_{h,3}, \mathfrak{p}_{h,4}, \mathfrak{p}_{h,5}, \ldots,$$

oder

$$P(6, m_1) \equiv \cdots, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,2}, \mathfrak{p}_{h,3}, \mathfrak{p}_{h,4}, \mathfrak{p}_{h,5}, \mathfrak{p}_{h,6}, \ldots,$$

so besitzt es ein irreducibeles Nachbarpolygon

$$P(6, m_1 - 2) \equiv \cdots, \mathfrak{p}_g, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{q}, \mathfrak{p}_{h,5}, \ldots$$

oder ein irreducibeles Nachbarpolygon

$$P(6, m_1 - 4) \equiv \cdots, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,6}, \cdots.$$

Denn angenommen das Polygon $P(6, m_1 - 2)$ — es genügt, dieses eine zu betrachten — wäre reducibel, d. h. es enthielte einen mindestens zwei Kanten weniger zählenden, von $\mathfrak{q}$ ausgehenden Zug

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_g, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i,$$

welchem auf dem Hexagonoide ein isomorphes Polygon entspricht,

$$P(6, m_2) \equiv \mathfrak{q}', \mathfrak{p}'_{h,1}, \mathfrak{p}'_g, \ldots, \mathfrak{p}'_{i-1}, \mathfrak{p}'_i \equiv \mathfrak{q}',$$

so werden in letzterem die drei Kanten

$$| \mathfrak{p}'_i, \mathfrak{q}' |, \quad | \mathfrak{q}', \mathfrak{p}'_{h,1} |, \quad | \mathfrak{p}'_{h,1}, \mathfrak{p}'_g |$$

einen entweder aufserhalb oder innerhalb einer Ebene liegenden Zug bilden. Im ersten Falle sind — den Umfang des Grenzsechseckes der Ebene $[\mathfrak{p}'_{h,1}, \mathfrak{q}', \mathfrak{p}'_{i-1}]$ aufgefafst — die Ecken $\mathfrak{p}'_{h,1}$ und $\mathfrak{p}'_{i-1}$ durch einen dem Zuge $\mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,5}$ isomorphen Zug $\mathfrak{p}'_{h,1}, \mathfrak{p}'_{h,2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{h,5} \equiv \mathfrak{p}'_{i-1}$ verbunden. Es entspricht dann also einem Zuge

$$\mathfrak{p}_{h,5}, \mathfrak{p}_{h,4}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_g, \ldots, \mathfrak{p}_{i-1}$$

des Polygones $P(6, m_1)$ auf H_6 ein isomorpher geschlossener Zug

$$\mathfrak{p}'_{h,5}, \mathfrak{p}'_{h,2}, \ldots, \mathfrak{p}'_{h,1}, \mathfrak{p}'_g, \ldots, \mathfrak{p}'_{i-1} \equiv \mathfrak{p}'_{h,5}.$$

Analog folgt im zweiten Falle, je nachdem man die der Kante $| \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1} |$ des Polygones $P(6, m_1 - 2)$ entsprechende Kante $| \mathfrak{p}'_i, \mathfrak{p}'_{i+1} |$ der Abbildung als mit der Kante $| \mathfrak{q}', \mathfrak{p}'_{h,1} |$ oder als mit der dritten durch $\mathfrak{q}'$ gehenden Kante $| \mathfrak{q}', \mathfrak{p}'_{h,5} |$ coincident betrachtet, dafs dem Zuge

$$\mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_g, \ldots, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}$$

oder dem Zuge

$$\mathfrak{p}_{h,5}, \mathfrak{p}_{h,4}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_g, \ldots, \mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_{i+1}$$

des Polygones $P(6, m_1)$ auf H_6 wiederum ein geschlossener Zug entspricht. In beiden Fällen verstofsen also die abgeleiteten Konsequenzen gegen die Irreducibilität des Polygones $P(6, m_1)$. Q. e. d.

Nach der Voraussetzung giebt es aber sowohl zu $P(6, m_1 - 2)$ als zu $P(6, m_1 - 4)$ auf dem Hexagonoide H_6 wenigstens ein isomorphes Polygon von der Beschaffenheit, dafs der von demselben und von der Grundfläche $\langle \alpha_0 \rangle_6$ doppelt berandete Gürtel die dem Sechseck

$$\mathfrak{q}, \mathfrak{p}_{h,1}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,5}, \mathfrak{p}_{h,1}$$

resp. dem Sechseck

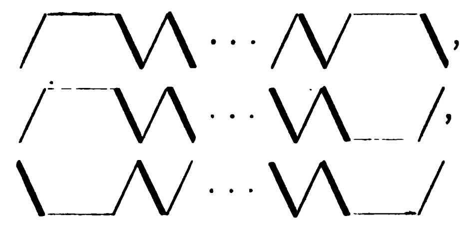
$$\mathfrak{p}_{h,1}, \mathfrak{p}_{h,2}, \ldots, \mathfrak{p}_{h,6}, \mathfrak{p}_{h,1}$$

entsprechende Fläche ausschliefst. Folglich enthält das Hexagonoid H_c auch ein zu $P(6, m_1)$ isomorphes Polygon.

Wenn dagegen die Anzahlen a_4 und a_5 den Wert 0 haben, wenn also die Gleichung besteht

$$a_3 = 6 + b_3 + 2b_4 + 3b_5,$$

so hat man, die Anzahlen der unter die drei möglichen Formen



fallenden Kantenfolgen mit resp.

$$a', \ (a', b'), \ b'$$

bezeichnend, die Relationen:

1) $2a' + (a', b') = 2a_3$, 2) $2b' + (b', a') = 2(b_3 + b_4 + b_5)$,

und folglich

$$3) \quad a' - b' = a_3 - (b_3 + b_4 + b_5) = 6 + b_4 + 2b_5.$$

Das gegebene Polygon besitzt also mindestens sechs Züge des Typus

1) e_1 1 2 . . . $a-1$ a e_2

Durch entsprechendes Ansetzen von a Sechsecken an einen solchen Zug (nach der unteren Seite) findet man als freien Rand des angesetzten Flächensystemes einen Zug

2) e_1 1 2 . . . $a-1$ a e_2,

welcher zwei Kanten weniger als der Grundzug besitzt. Indem man daher in dem gegebenen irreducibelen Polygone $P(6, m_1)$ den Zug 1) durch den Zug 2) ersetzt, gelangt man zu einem gleichfalls irreducibelen*) Polygone $P(6, m_1 - 2)$ mit nur noch

*) Man beweist zunächst auf ähnliche Weise wie früher bei dem Austausch eines vier- und eines fünfkantigen ebenen Zuges gegen einen

$m_1 - 2$ Kanten. Zu letzterem existiert aber auf dem Hexagonoide H_6 ein isomorphes Polygon

$$P'(6, m_1 - 2) \equiv \cdots \overset{e_1'}{\diagdown}\!\diagup\!\diagdown\!\diagup \cdots \diagdown\!\diagup\!\diagdown\!\overset{e_2'}{\diagup} \cdots.$$

Folglich enthält H_6 auch ein zu $P(6, m_1)$ isomorphes Polygon

$$P'(6, m_1) \equiv \cdots \underset{e_1'}{\diagup}\overline{\qquad}\diagdown\!\diagup\!\diagdown \cdots \diagup\!\diagdown\!\diagup\overline{\qquad}\underset{e_2'}{\diagdown} \cdots.$$

Die Anzahl m der Kanten eines irreducibelen Polygones $P(6, m)$ erreicht zufolge der beiden Beziehungen

$$m = 6 + 2(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + b_3 + 2b_4 + 3b_5)$$

und

$$a_3 + 2a_4 + 3a_5 = 6 + b_3 + 2b_4 + 3b_5$$

ihr Minimum für die Werte

$$a_2 = a_3 = a_4 = b_3 = b_4 = b_5 = 0,$$

$$a_5 = 2.$$

Ein so definiertes zehnkantiges Polygon hat notwendig die Form

$$P(6, 10) \equiv \mathfrak{p}_{1,1},\ \mathfrak{p}_{1,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{1,6} \equiv \mathfrak{p}_{2,1},\ \mathfrak{p}_{2,2},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{2,6} \equiv \mathfrak{p}_{1,1}.$$

Zu demselben werden aber auf dem Hexagonoide H_6 durch dessen Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_6$ und je eine ihrer Seitenflächen sechs isomorphe der Grundfläche benachbarte Polygone bestimmt.

Man gelangt daher zu dem Satze:

Theorem 13. *Zu jedem aus höchstens fünfkantigen ebenen Zügen bestehenden irreducibelen Polygone $P(c, m)$ der Charakteristik $c = 6$ giebt es auf einem zu der sechskantigen Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_6$ gehörigen Hexagonoide allemal mindestens ein isomorphes, der Grundfläche benachbartes Polygon.*

---

zwei- und einen einkantigen Zug auch bei dem gegenseitigen Austausch zweier dreikantiger ebener Züge, dafs die Irreducibilität des Polygones erhalten bleibt. Der successive Übergang von dem Polygone $P(6, m_1)$ durch a Nachbarpolygone zu dem Polygone $P(6, m_1 - 2)$ zeigt dann unmittelbar des letzteren Irreducibilität.

§ 19. Einteilung der Elementarpolygone.

Ein Hexagonoid H soll *elementar* heifsen, wenn es ein Elementarpolygon $P(c, m)$ enthält.

Nach § 15 wird eine solche Fläche aus dem Polygone $P(c, m)$ bekanntlich dadurch erzeugt, dafs zunächst an letzteres nach beiden Seiten hin zwei isomorphe irreducibele Elementargürtel $G' \equiv (P, P')$, $'G \equiv (P, 'P)$, darauf an deren mit P isomorphe Randpolygone P', $'P$ zwei den vorigen isomorphe Gürtel $G'' \equiv (P', P'')$, $''G \equiv ('P, ''P)$, u. s. w. angesetzt werden:

$$H \equiv \cdots + ''G + 'G + G' + G'' + \cdots,$$

wo die Zahl der Gürtel $G^{(h)}$ und ${}^{(h)}G$ ins unbegrenzte vermehrt werden kann.

Bestimmt man zu einer beliebigen Kante $|\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0|$ des Gürtels G' die linksseitige Gegenkantenfolge

$$\ldots, |\mathfrak{a}_{-2}, \mathfrak{b}_{-2}|, |\mathfrak{a}_{-1}, \mathfrak{b}_{-1}|, |\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0|, |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2|, \ldots,$$

so kann zweierlei eintreten:

I. Entweder bildet der Zug

$$\ldots, \mathfrak{a}_{-2}, \mathfrak{b}_{-2}, \mathfrak{a}_{-1}, \mathfrak{b}_{-1}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots,$$

— derselbe werde als der zu $|\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0|$ gehörige rechts- bzw. linksseitige Kantenzug bezeichnet — ausreichend weit fortgesetzt, ein Polygon;

II. oder es setzt sich derselbe nach beiden Seiten hin ohne jeden Durchschnitt ins Unendliche fort.

Unter der ersten Annahme kommen nach § 17 für die Bildungsweise einer Schleife folgende*) Kantencoincidenzen in Frage:

1) $|\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{k+1}| \equiv |\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|$; 2) $|\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{k+1}| \equiv |\mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_i|$;
3) $|\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k| \equiv |\mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_{i+1}|$; 4) $|\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k| \equiv |\mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_i|$;
5) $|\mathfrak{a}_k, \mathfrak{b}_k| \equiv |\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|$; 6) $|\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{k+1}| \equiv |\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{a}_i|$.

Diesen sechs Möglichkeiten entsprechen drei wesentlich verschiedene Polygone, nämlich:

*) Die Annahmen $|\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_k| \equiv |\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_i|$ und $|\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_{k+1}| \equiv |\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}_{i-1}|$ sind auszuschliefsen, weil nach denselben entgegen der Voraussetzung bereits $|\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_{k-1}|$ mit $|\mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_{i+1}|$ und $|\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{a}_k|$ mit $|\mathfrak{a}_{i+1}, \mathfrak{b}_i|$ zusammenfallen müfste.

*) 1, 3, 4) $\ldots \equiv P_1$

2) $\ldots \equiv P_2$

5, 6) $\ldots\ldots\ldots \equiv P_3$,

wo die erste und letzte Kante als coincident anzusehen sind. Die Charakteristiken dieser drei Polygone sind resp.:

$$c = \pm 1, \quad c = \pm 2, \quad c = 0.$$

Nach § 15 und § 18 giebt es aber auf einem elementaren Hexagonoide H nur zwei Kategorieen von Polygonen, und zwar:

1) solche, welche die vollständige Berandung einer geschlossenen Fläche, des Teiles eines Hexagonoides H_6, bilden, und denen folglich die Charakteristik $c = 6$ zukommt;

2) solche, welche das Hexagonoid H in zwei unendlich ausgedehnte Flächen teilen und die Charakteristik des ihnen benachbarten Grundpolygones haben.

Daraus folgt, dafs dasjenige der Polygone P_1, P_2, P_3, welches thatsächlich auftritt, notwendig Elementarpolygon ist.

Nun werden die zweiten Randpolygone der an die Polygone P_1 und P_2 nach der unteren Seite hin angrenzenden Elementarstreifen der Reihe nach dargestellt durch:

1) $P_1' \equiv \ldots$

$P_1'' \equiv \ldots$

. . . .

$P_1^{(m-1)} \equiv$

und

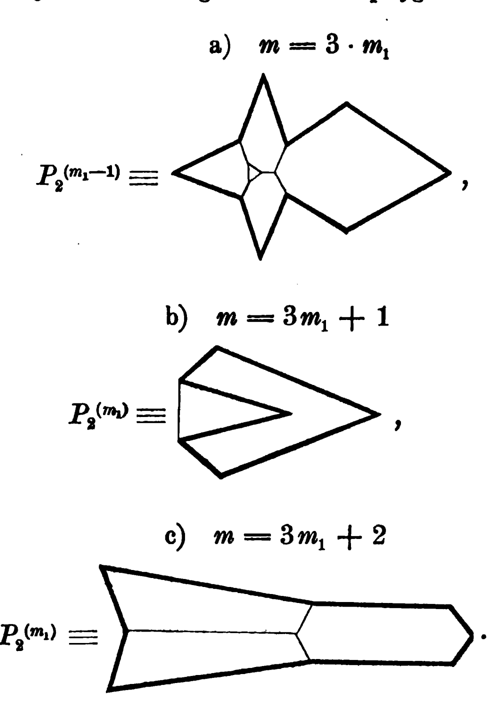
2) $P_2' \equiv \ldots$

$P_2'' \equiv \ldots$

. . . .

---

*) Die Verstärkungen in den Figuren entsprechen immer nur den ersten der durch sie veranschaulichten Fälle.



Da hiernach die Polygone P_1 und P_2 zwei geschlossene Flächen*) beranden, welche aufser einer gewissen Anzahl von Sechsecken noch je zwei andersförmige Grenzpolygone $\langle\alpha\rangle$ enthalten, können dieselben nicht Elementarpolygone sein, und es sind somit die oben gemachten Annahmen (1)—(4) illusorisch.

Das dritte in Frage kommende Polygon P_3 dagegen ist in der That Elementarpolygon, und zwar von dem Typus eines links- bezw. rechtsseitigen Normalpolygones. Also folgt:

Konstruiert man auf einem Hexagonoide H_c mit dem Elementarpolygone $P(c, n)$ zu irgend einer Kante $| \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0 |$ den

*) Bei den hier und im folgenden gemachten Annahmen über die Zusammensetzungsweise dieser und entsprechender Flächen aus ebenen Grenzpolygonen ist immer nur eine Möglichkeit in Betracht gezogen worden. In einzelnen Fällen gehören jedoch zu einem Randpolygone einer von 0 und 6 verschiedenen Charakteristik mehrere allomorphe geschlossene Flächen. Jede derselben enthält dann gleichfalls mindestens ein nicht sechsseitiges Grenzpolygon.

links- oder den rechtsseitigen Kantenzug, so kann sich derselbe, wenn überhaupt, nur zu einem Normalpolygone schliefsen. Dann aber haben alle auf H_c vorhandenen Elementarpolygone die Charakteristik $c = 0$.

Hat man nun auf H_0 ein linksseitiges Normalpolygon

$$P_1(0, 2m) \equiv \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m, \mathfrak{a}_1,$$

so bezeichne man

1) die in den Ebenen

$$[\mathfrak{b}_m, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1], \quad [\mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2], \ldots, [\mathfrak{b}_{m-1}, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m]$$

liegenden Grenzsechsecke des ersten angrenzenden Normalgürtels durch resp.

$$\langle \alpha_1' \rangle_6, \langle \alpha_2' \rangle_6, \ldots, \langle \alpha_m' \rangle_6,$$

2) die zweiten Ecken der Kanten

$$|\alpha_1', \alpha_2'|, \quad |\alpha_2', \alpha_3'|, \ldots, |\alpha_m', \alpha_1'|$$

durch resp.

$$\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2', \ldots, \mathfrak{a}_m'$$

und die durch sie gehenden Flächen des zweiten Normalgürtels entsprechend durch

$$\langle \alpha_1'' \rangle_6, \langle \alpha_2'' \rangle_6, \ldots, \langle \alpha_m'' \rangle_6,$$

. . . .

Es genügt dann der Kantenzug

$$|\alpha_m', \alpha_1'|, \quad |\alpha_m'', \alpha_1'|, \quad |\alpha_m'', \alpha_1''|, \quad |\alpha_m''', \alpha_1''|, \quad |\alpha_m''', \alpha_1'''|, \ldots$$

der zweiten obigen Bedingung, indem er sich spiralförmig an dem Hexagonoide aufwindet.

Aus der Existenz eines linksseitigen Normalpolygones folgt also die Existenz eines linksseitigen und unendlichen sich nicht durchsetzenden Normalzuges, und zwar gehört dann zu einer beliebigen Kante entweder ein linksseitiges Normalpolygon und ein rechtsseitiger Normalzug oder ein rechtsseitiges Normalpolygon und ein linksseitiger Normalzug.

Es ist *unmöglich*, dafs auf einem Hexagonoide H_0 *zwei allomorphe* Normalpolygone $P_1(0, 2m)$ und $P_1(0, 2m')$ vorkommen. Denn da aus dieser Annahme folgt, dafs durch zwei der in einer Ecke $\mathfrak{x}$ zusammenstofsenden drei Kanten ein Polygon $P_1(0, 2m)$ und durch zwei Kanten ein Polygon

$P_1(0, 2m')$ geht, so mufs eine dieser drei Kanten zu beiden Polygonen gehören. Dann aber müfste das eine das rechts-, das andere das linksseitige Normalpolygon sein, was gegen die vorher bewiesene Eigenschaft verstöfst.

Wird jetzt vorausgesetzt, dafs weder der zur Kante $|\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0|$ gehörige rechtsseitige Kantenzug

$$Z' \equiv \cdots, \mathfrak{a}'_{-2}, \mathfrak{b}'_{-2}, \mathfrak{a}'_{-1}, \mathfrak{b}'_{-1}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, \mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{b}_2', \ldots,$$

noch auch der zugehörige linksseitige Kantenzug

$$'Z \equiv \cdots, '\mathfrak{a}_{-2}, '\mathfrak{b}_{-2}, '\mathfrak{a}_{-1}, '\mathfrak{b}_{-1}, \mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0, '\mathfrak{a}_1, '\mathfrak{b}_1, '\mathfrak{a}_2, '\mathfrak{b}_2, \ldots$$

sich selbst jemals durchsetzt, dafs also auf dem Hexagonoide kein Normalpolygon des Typus $P_1(0, 2m)$ vorhanden ist, *so müssen die beiden Kantenzüge Z' und $'Z$ einander unendlich oft durchsetzen.*

Zufolge des Isomorphismus der Polygone

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$''P \equiv {''\mathfrak{p}_1}, {''\mathfrak{p}_2}, \ldots, {''\mathfrak{p}_m}, {''\mathfrak{p}_1}, \quad 'P \equiv {'\mathfrak{p}_1}, {'\mathfrak{p}_2}, \ldots, {'\mathfrak{p}_m}, {'\mathfrak{p}_1},$$

$$P \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m, \mathfrak{p}_1,$$

$$P' \equiv \mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_m', \mathfrak{p}_1', \quad P'' \equiv \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'', \ldots, \mathfrak{p}_m'', \mathfrak{p}_1'',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und der von ihnen berandeten Elementargürtel

$$\ldots, {''G} \equiv (''P, 'P), \; 'G \equiv ('P, P), \; G' \equiv (P, P'), \; G'' \equiv (P', P''), \ldots$$

müssen nämlich die aus dem Polygone P mit der Kante $|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{b}_0| \equiv |\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0|$ heraustretenden Kantenzüge

$$Z' \equiv Z'_{-1} + |\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0| + Z_1', \qquad 'Z \equiv {'Z_{-1}} + |\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0| + {'Z_1}$$

je zwei Polygone*)

$$^{(r)}P, \; P^{(r)} \quad \text{und} \quad ^{(s)}P, \; P^{(s)}$$

der beiden Reihen

$$^{(m)}P, \; ^{(m-1)}P, \ldots, 'P, P \quad \text{und} \quad P, P', P'', \ldots, P^{(m)}$$

in den entsprechenden Kanten verlassen, nämlich:

$$^{(r)}P, \; P^{(r)} \text{ in den Kanten } |\mathfrak{a}'_{-\varrho}, \mathfrak{b}'_{-\varrho}|, \; |\mathfrak{a}'_{\varrho}, \mathfrak{b}'_{\varrho}|,$$

$$^{(s)}P, \; P^{(s)} \text{ in den Kanten } |'\mathfrak{a}_{-\sigma}, '\mathfrak{b}_{-\sigma}|, \; |'\mathfrak{a}_{\sigma}, '\mathfrak{b}_{\sigma}|.$$

*) In der hier stillschweigend gemachten Annahme, dafs die Polygone $^{(h)}P$, $P^{(h)}$ sich selbst nicht mehrfach isomorph sind, und dafs sie von Z', $'Z$ in nur je einem Kantenzuge durchsetzt werden, ist eine wesentliche Beschränkung nicht enthalten.

Dann aber werden, das kleinste gemeinsame Vielfache von r und s mit μ bezeichnet, Z' und $'Z$ die Polygone $^{(\mu)}P$ und $P^{(\mu)}$ in denselben durch resp. die Ecken $^{(\mu)}\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_1{}^{(\mu)}$ gehenden Kanten verlassen und folglich auch irgend zwei Polygone

$$^{(h\cdot\mu)}P \text{ und } P^{(h\cdot\mu)},$$
$$(h = 1, 2, \ldots).$$

Man hat zwei Arten der Durchsetzung der beiden Züge $Z', 'Z$ zu unterscheiden, nämlich:

1) diejenige, bei welcher Z_1' mit $'Z_1$ und Z'_{-1} mit $'Z_{-1}$,
2) diejenige, bei welcher Z_1' mit $'Z_{-1}$ und $'Z_1$ mit Z'_{-1}

sich durchsetzt.

Verfolgt man im ersten Falle die Züge Z_1' und $'Z_1$ bis zu dem auf $|\,\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0\,|$ nächstfolgenden Paare zusammenfallender Kanten und betrachtet das von diesen Teilen der beiden Züge gebildete Polygon, so hat dasselbe entsprechend den sechs*) Coincidenzen

1) $|\,\mathfrak{a}_i', \mathfrak{b}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{a}_k, '\mathfrak{b}_k\,|$, 2) $|\,\mathfrak{a}_i', \mathfrak{b}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{b}_k, '\mathfrak{a}_k\,|$,

3) $|\,\mathfrak{a}_i', \mathfrak{b}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{a}_k, '\mathfrak{b}_{k-1}\,|$, 4) $|\,\mathfrak{b}_{i-1}', \mathfrak{a}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{b}_k, '\mathfrak{a}_k\,|$,

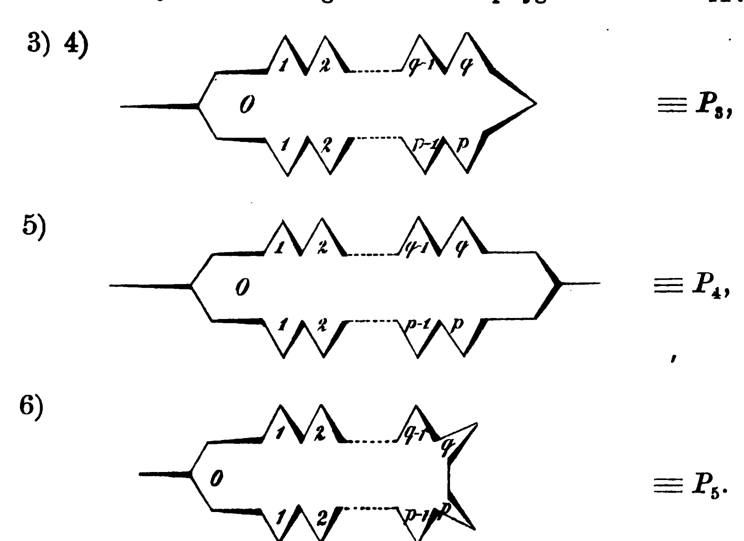
5) $|\,\mathfrak{b}_{i-1}', \mathfrak{a}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{b}_{k-1}, '\mathfrak{a}_k\,|$, 6) $|\,\mathfrak{b}_{i-1}', \mathfrak{a}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{a}_k, '\mathfrak{b}_{k-1}\,|$

notwendig eine der folgenden Formen:

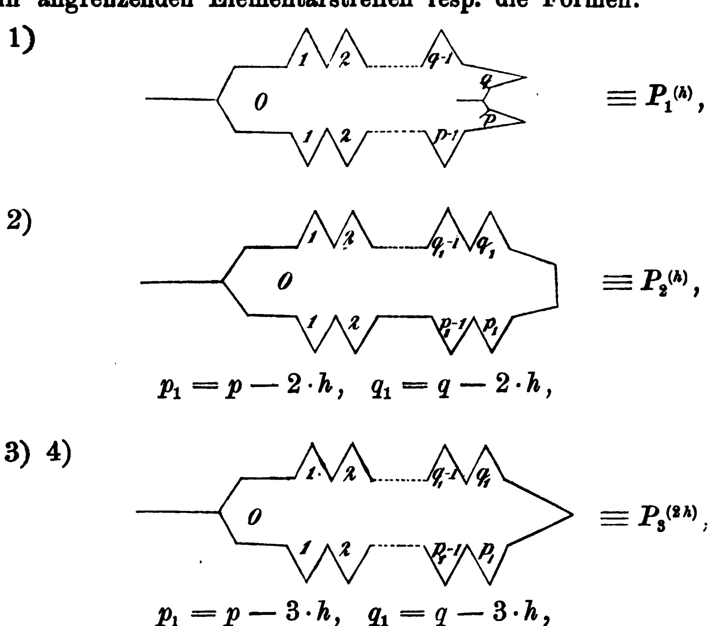
1) $\equiv P_1,$

2) $\equiv P_2,$

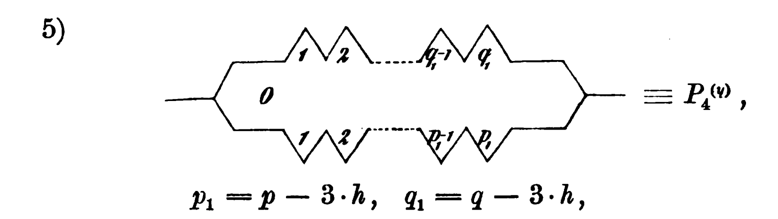
*) Die Annahmen $|\,\mathfrak{a}_i', \mathfrak{b}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{b}_{k-1}, '\mathfrak{a}_k\,|$ und $|\,\mathfrak{b}_{i-1}', \mathfrak{a}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{a}_k, '\mathfrak{b}_k\,|$ sind auszuschliefsen, weil nach denselben entgegen der Voraussetzung bereits $|\,\mathfrak{b}_{i-1}', \mathfrak{a}_i\,|$ mit $|\,\mathfrak{a}_{k-1}', \mathfrak{b}_{k-1}'\,|$ und $|\,\mathfrak{a}_{i-1}', \mathfrak{b}_{i-1}'\,|$ mit $|\,'\mathfrak{b}_{k-1}, '\mathfrak{a}_k\,|$ zusammenfallen müfste.



Da keines dieser fünf Polygone die Charakteristik 6 hat, mufs das endgiltige unter ihnen Elementarpolygon sein. Es zeigen aber die Randpolygone der nach ihren inneren Seiten hin angrenzenden Elementarstreifen resp. die Formen:



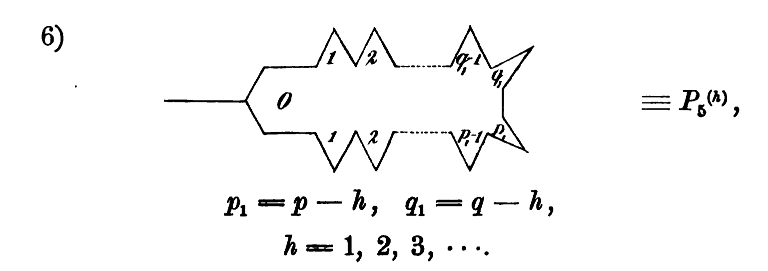
5)



$$\equiv P_4^{(\nu)},$$

$$p_1 = p - 3 \cdot h, \quad q_1 = q - 3 \cdot h,$$

6)



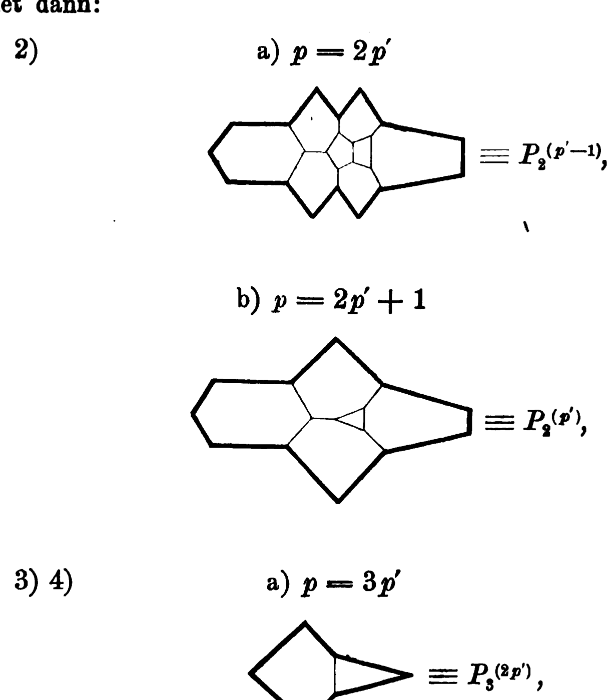
$$\equiv P_5^{(h)},$$

$$p_1 = p - h, \quad q_1 = q - h,$$

$$h = 1, 2, 3, \cdots.$$

Der Einfachheit halber werde $p = q$ vorausgesetzt. Man findet dann:

2) a) $p = 2p'$



$$\equiv P_2^{(p'-1)},$$

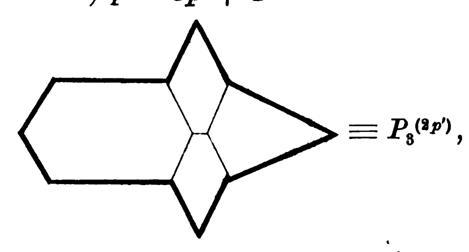
b) $p = 2p' + 1$

$$\equiv P_2^{(p')},$$

3) 4) a) $p = 3p'$

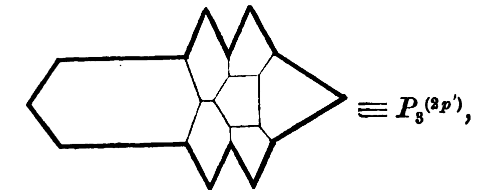
$$\equiv P_3^{(2p')},$$

b) $p = 3p' + 1$



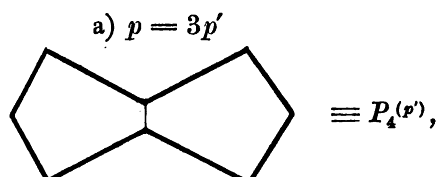
$\equiv P_3^{(2p')}$,

c) $p = 3p' + 2$



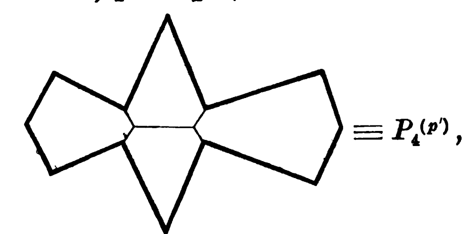
$\equiv P_3^{(2p')}$,

5) a) $p = 3p'$



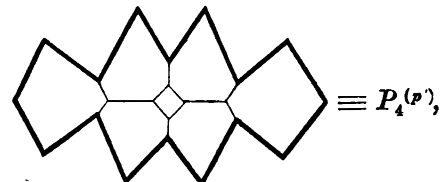
$\equiv P_4^{(p')}$,

b) $p = 3p' + 1$



$\equiv P_4^{(p')}$,

c) $p = 3p' + 2$



$\equiv P_4^{(p')}$,

6)

$$\equiv P_5^{(p-1)}.$$

Nach diesem Schema beranden die Polygone P_2, P_3, P_4, P_5 endliche geschlossene Flächen, deren jede aufser einer gewissen Zahl von Sechsecken noch mindestens eine andersförmige Grenzfläche $\langle\alpha\rangle$ enthält.

Dieses Ergebnis besteht, wie man sich leicht überzeugt, auch in dem allgemeineren Falle zu Recht, wo die Zahlen p, q von einander verschieden sind. Also folgt:

Die zu einer Kante $|\,\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0\,|$ eines Elementarhexagonoides H gehörigen links- und rechtsseitigen Kantenzüge Z_1' und $'Z_1$ können, wenn überhaupt, nur ein Elementarpolygon des Typus P_1 bestimmen, welches, und mit ihm alle Elementarpolygone der Fläche, die Charakteristik $c = 0$ besitzt,

$$P_1 \equiv P_2(0, 2m).$$

Auch hier gilt, wie in dem früheren Falle eines Elementarhexagonoides mit einem Grundpolygone $P_1(0, 2m)$, der Satz, dafs allomorphe Elementarpolygone des Typus $P_2(0, 2m)$ auf demselben Hexagonoide nicht neben einander auftreten können. Der bezügliche Beweis wird weiter unten gegeben.

Es ist endlich noch zu untersuchen, auf welche verschiedene Arten der zu einer Kante $|\,\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0\,|$ gehörige rechtsseitige Kantenzug

$$Z_1' \equiv \mathfrak{a}_0,\ \mathfrak{b}_0,\ \mathfrak{a}_1',\ \mathfrak{b}_1',\ \mathfrak{a}_2',\ \mathfrak{b}_2',\ \ldots$$

und der zu der Kante $|\,\mathfrak{b}_0, \mathfrak{a}_0\,|$ gehörige linksseitige Zug

$$'Z_{-1} \equiv \mathfrak{b}_0,\ \mathfrak{a}_0,\ '\mathfrak{b}_{-1},\ '\mathfrak{a}_{-1},\ '\mathfrak{b}_{-2},\ '\mathfrak{a}_{-2},\ \ldots$$

einander durchsetzen können.

Entsprechend den sechs*) in Frage kommenden Coincidenzen

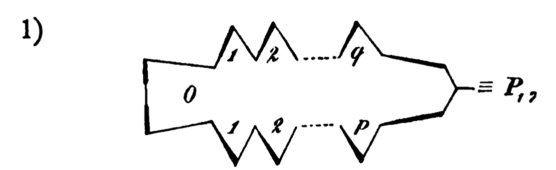
*) Die zwei übrigen Coincidenzen

$$|\,\mathfrak{a}_i', \mathfrak{b}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{a}_{-k+1}, '\mathfrak{b}_{-k}\,|, \quad |\,\mathfrak{a}_{i+1}', \mathfrak{b}_i'\,| \equiv |\,'\mathfrak{a}_{-k}, '\mathfrak{b}_{-k}\,|$$

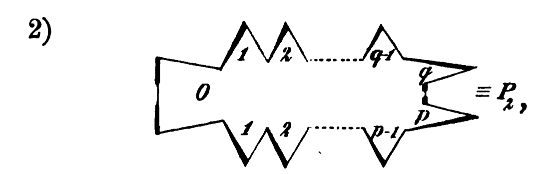
$$1)\ |\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{b}'_i| \equiv |'\mathfrak{b}_{-k}, '\mathfrak{a}_{-k}|, \quad 2)\ |\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{b}'_i| \equiv |'\mathfrak{a}_{-k}, '\mathfrak{b}_{-k}|,$$
$$3)\ |\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{b}'_i| \equiv |'\mathfrak{b}_{-k}, '\mathfrak{a}_{-k+1}|, \quad 4)\ |\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{a}'_{i+1}| \equiv |'\mathfrak{a}_{-k}, '\mathfrak{b}_{-k}|,$$
$$5)\ |\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{a}'_{i+1}| \equiv |'\mathfrak{a}_{-k}, '\mathfrak{b}_{-k+1}|, \quad 6)\ |\mathfrak{b}'_i, \mathfrak{a}'_{i+1}| \equiv |'\mathfrak{b}_{-k-1}, '\mathfrak{a}_{-k}|,$$

erhält man die Kantenpolygone:

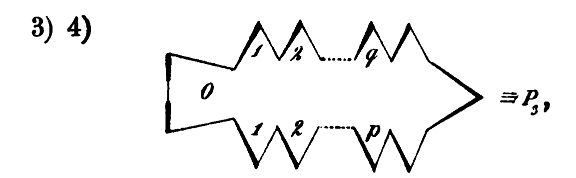
1)



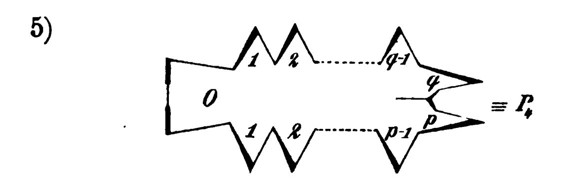
2)



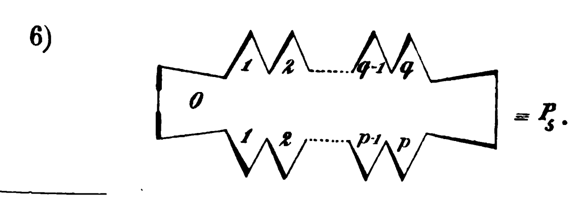
3) 4)



5)



6)



---

sind deshalb von vornherein auszuschließen, weil dieselben die anderen bedingen würden,

$|\mathfrak{a}'_{i-1}, \mathfrak{b}'_{i-1}| \equiv |'\mathfrak{a}_{-k+2}, '\mathfrak{b}_{-k+1}|$; $\quad |\mathfrak{a}'_i, \mathfrak{b}'_{i-1}| \equiv |'\mathfrak{a}_{-k+1}, '\mathfrak{b}_{-k+1}|$.

was gegen die Voraussetzung ist.

Wie in den früheren Fällen, so zeigt auch hier der Vergleich dieser Polygone mit den Randpolygonen der angrenzenden Elementarstreifen, dafs diejenigen vier Polygone, deren Charakteristiken nicht 0 sind, endliche geschlossene Flächen begrenzen, welche aufser einer gewissen Zahl von Sechsecken $\langle\alpha\rangle_6$ noch mindestens je ein andersförmiges Grenzpolygon enthalten. Das Polygon P_8 der Charakteristik 0 ist daher das einzige Elementarpolygon unter den gegebenen fünf Typen. Also:

Wenn auf einem Elementarhexagonoide H von den zu einer Kante $|\,\mathfrak{a}_0, \mathfrak{b}_0\,|$ gehörigen vier Kantenzügen

$$Z'_{-1},\ Z_1',\ 'Z_{-1},\ 'Z_1$$

der erste nicht den dritten und der zweite nicht den vierten durchsetzt, so müssen der erste mit dem vierten und der zweite mit dem dritten zwei isomorphe Polygone des Typus P_8 bestimmen,

$$P_8 \equiv P_8(0, 2m).$$

Es soll jetzt gezeigt werden, *dafs auf einem Elementarhexagonoide H_0 mit einem Polygone $P_8(0, 2m)$ ein diesem allomorphes Polygon $P_8(0, 2m_1)$ nicht auftreten kann.*

Zum Beweise nehme man an, H_0 enthalte zwei und folglich unendlich viele Polygone der beiden allomorphen Typen

$$P_8(0, 2m) \equiv P_8(0, 2p + 2q + 4) \quad \text{und}$$
$$P_8(0, 2m_1) \equiv P_8(0, 2p_1 + 2q_1 + 4),$$

so kann man stets zwei Individuen $P_8'(0, 2m)$ und $\overline{P}_8(0, 2m_1)$ herausgreifen, die keine Kante gemein haben, welche also einen einfachen Gürtel G einschliefsen. Alsdann zerlege man G von $P_8'(0, 2m)$ aus in ein System aneinander grenzender Elementarstreifen,

$$S' \equiv \langle\alpha_1'\rangle_6,\ \langle\beta_1'\rangle_6,\ \langle\beta_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_p'\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_2'\rangle_6,\ \langle\gamma_1'\rangle_6,\ \langle\gamma_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_q'\rangle_6;$$
$$S'' \equiv \langle\alpha_1''\rangle_6,\ \langle\beta_1''\rangle_6,\ \langle\beta_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_p''\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_2''\rangle_6,\ \langle\gamma_1''\rangle_6,\ \langle\gamma_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_q''\rangle_6,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wo allgemein $\langle\alpha_1^{(\varrho)}\rangle_6$ und $\langle\alpha_2^{(\varrho)}\rangle_6$ diejenigen zwei Flächen des Streifens $S^{(\varrho)}$ vorstellen, welche mit dem Randpolygone

$P_3^{(\varrho)}(0, 2m)$ des Streifens $S^{(\varrho-1)}$ resp. drei und eine Kante gemein haben, und wo je zwei benachbarte Flächen eines Streifens Seitenflächen sind. Aufserdem bezeichne man die auf einander folgenden Flächen des ersten an das Polygon $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ grenzenden, zu G gehörigen Streifens $\overline{S}_1$ in der Weise durch

$$\langle\bar{\alpha}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_2\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_2\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6,$$

dafs $\overline{P}(0, 2m_1)$ mit $\langle\bar{\alpha}_1\rangle_6$ eine, mit $\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6$ drei Kanten gemein hat.

Gemäfs diesen Festsetzungen mufs in der Reihe $S', S'', \ldots$ ein erster Streifen $S^{(h-1)}$ existieren, von dessen Flächen mindestens eine mit einer Fläche des Streifens $\overline{S}_1$ identisch ist, so dafs dessen freies, ganz innerhalb des Gürtels G verlaufendes Randpolygon $P_3^{(h)}(0, 2m)$ mit $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ mindestens entweder einen *ein-*, oder einen *zwei-*, oder einen *dreikantigen* ebenen Zug gemein hat.

I. In dem ersten Falle, in welchem die Streifen $S^{(h-1)}$ und $\overline{S}_1$ nur die eine Fläche $\langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\alpha}_1\rangle_6$ gemein haben, bestimmen die beiden Polygone $P_3^{(h)}(0, 2m)$ und $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ nach Ausscheidung ihrer einen gemeinsamen Kante das Randpolygon P_0 einer einfach zusammenhängenden hexagonoidischen Fläche F_0. Die Randflächen derselben seien bezeichnet durch

$$\begin{gathered}\langle\bar{\beta}_1\rangle_6 \equiv \langle\beta_1^{(h)}\rangle_6,\ \langle\beta_2^{(h)}\rangle_6,\ \langle\beta_3^{(h)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_q^{(h)}\rangle_6,\\ \langle\alpha_1^{(h)}\rangle_6,\ \langle\gamma_1^{(h)}\rangle_6,\ \langle\gamma_2^{(h)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_p^{(h)}\rangle_6 \equiv \bar{\gamma}_{q_1},\\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-2}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,\\ \langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\beta}_1\rangle_6,\end{gathered}$$

von denen die Flächen $\langle\beta_1^{(h)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_1\rangle_6$ und $\langle\gamma_p^{(h)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6$ zwei vierkantige, die Flächen $\langle\alpha_1^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6$ zwei dreikantige Züge des Polygones P_0 enthalten. — Die Verminderung der Fläche F_0 um die Sechsecke

$$\langle\beta_1^{(h)}\rangle_6,\ \langle\beta_2^{(h)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_q^{(h)}\rangle_6,\ \langle\alpha_1^{(h)}\rangle_6$$

ergiebt eine gleichartige Fläche F_1 mit den Randflächen

$$\langle\bar{\beta}_2\rangle_6,\ \langle\delta_1'\rangle_6,\ \langle\delta_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta'_{q-1}\rangle_6,\ \langle\gamma_1^{(h)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6,$$

$$\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6,\ldots,\langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\beta}_3\rangle_6,$$

von denen die Flächen $\langle\bar{\beta}_2\rangle_6$ und $\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6$ zwei vierkantige, die Flächen $\langle\gamma_1^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6$ zwei dreikantige Züge des F_1 berandenden Polygones P_1 enthalten. Die weitere Ausscheidung der Flächen

$$\langle\bar{\beta}_2\rangle_6,\ \langle\delta_1'\rangle_6,\ \langle\delta_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta_{q-1}'\rangle_6,\ \langle\gamma_1^{(h)}\rangle_6$$

läſst eine Fläche F_2 resultieren, deren durch die neuen Randflächen

$$\langle\bar{\beta}_3\rangle_6,\ \langle\delta_1''\rangle_6,\ \langle\delta_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta_{q-1}''\rangle_6,\ \langle\gamma_2^{(h)}\rangle_6,\ \langle\gamma_3^{(h)}\rangle_6,\ \ldots,$$
$$\langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,$$
$$\langle\bar{\beta}_{p_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\beta}_4\rangle_6$$

bestimmtes Randpolygon P_2 mit zweien derselben, nämlich mit $\langle\bar{\beta}_3\rangle_6$ und $\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6$ zwei vierkantige, mit zwei anderen Flächen $\langle\gamma_2^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6$ zwei dreikantige Züge gemein hat. Bei fortgesetzter Reduktion der eingeschlossenen und jeder neu entstehenden Fläche F_i, wird man entsprechend den beiden Annahmen

$$1)\quad p < p_1, \qquad 2)\quad p = p_1$$

zu einer Fläche F_{p-1} mit einem Randflächensysteme gelangen

1) $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6,\ \langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\delta_2^{(p-1)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta_{q-1}^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6,$
$\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,$
$\langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\beta}_{p+1}\rangle_6;$

2) $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6,\ \langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\delta_2^{(p-1)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\delta_{q-1}^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6,$
$\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,$

in welchem die beiden Flächen $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6$ und $\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6$ zwei vierkantige, die beiden anderen $\langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6$ zwei dreikantige Züge des zugehörigen Randpolygones P_{p-1} aufweisen.

Da aber die Flächen $\langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6$ als Seitenflächen eine Innenkante von F_{p-1} gemein haben, da ferner diese und die Kante $|\,\gamma_{p-1}^{(h)},\ \delta_{q-1}^{(p-1)}\,|$ in die durch die sechste Kante von $\langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6$ gehende Fläche $\langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6$ führen, folgt, daſs $\langle\delta_{q-1}^{(p-1)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6$ gleichfalls eine Kante gemein haben, und daſs

sie mithin nach Weglassung der Sechsecke $\langle\gamma_{p-1}^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6$ wiederum resp. einen drei- und einen vierkantigen Zug des Randpolygones P_p der zurückbleibenden Fläche F_p enthalten. — Indem man daher weiter successive die Flächenpaare absondert

$$\langle\delta_{q-1}^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-1}\rangle_6;\ \langle\delta_{q-2}^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-2}\rangle_6,\ \cdots,$$

wird man

$$\text{a) für } q < q_1, \qquad \text{b) für } q = q_1$$

eine Fläche F_{p+q-2} mit folgendem Randflächensysteme erhalten:

1a) $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6,\ \langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-q+1}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-q}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,$
$\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1-1}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\bar{\beta}_{p+1}\rangle_6,$

1b) $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6,\ \langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,\ \langle\bar{\beta}_{p_1}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\bar{\beta}_{p+1}\rangle_6;$

2a) $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6,\ \langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_{q_1-q+1}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6,$

2b) $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6,\ \langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6,\ \langle\bar{\gamma}_1\rangle_6,\ \langle\bar{\alpha}_2\rangle_6.$

Die den drei Fällen 1a), 1b), 2a) entsprechenden Flächen F_{p+q-2} sind illusorisch, indem die resp. einen vier-, einen drei- und einen vierkantigen Zug des Polygones P_{p+q-2} enthaltenden ersten drei Randflächen einer jeden eine gemeinsame Seitenfläche $\langle\alpha\rangle$ mit einem mindestens siebenkantigen Zuge besitzen würden.

Der Fall 2b) dagegen führt in der That auf eine mögliche, nämlich auf eine aus dem Seitenflächenpaar $\langle\delta_1^{(p-1)}\rangle_6$, $\langle\bar{\alpha}_2\rangle_6$ und dem Scheitelflächenpaar $\langle\bar{\beta}_p\rangle_6$, $\langle\bar{\gamma}_1\rangle_6$ bestehende Fläche.

II. Der zweite Fall eines den Polygonen $P_3^{(h)}(0, 2m)$ und $\bar{P}_3(0, 2m_1)$ gemeinsamen zweikantigen Zuges ist bedingt durch eine der beiden Coincidenzen:

$$1)\quad \langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_i\rangle_6, \qquad 2)\quad \langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_k\rangle_6,$$
$$i = 1, 2, \cdots, p_1;\ k = 1, 2, \cdots, q_1.$$

Dieselben haben resp. die anderen zur Folge:

1a) $\langle\beta_p^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_{i-1}\rangle_6,\quad \langle\beta_{p-1}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_{i-2}\rangle_6,\ \cdots,$

1b) $\langle\gamma_1^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_{i+1}\rangle_6,\quad \langle\gamma_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_{i+2}\rangle_6,\ \cdots,$

2a) $\langle\beta_p^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{k-1}\rangle_6, \quad \langle\beta_{p-1}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{k-2}\rangle_6, \cdots,$

2b) $\langle\gamma_1^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{k+1}\rangle_6, \quad \langle\gamma_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{k+2}\rangle_6, \cdots.$

Von diesen vier Annahmen sind die zweite und dritte allemal, die erste und vierte unter den bezüglichen Bedingungen $i > p + 1$ und $q_1 - k > q$ mit der Definition des Polygones $P_3^{(h)}(0, 2m)$ unvereinbar, da dieselben eine gegenseitige Durchsetzung dieses mit dem Polygone $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ involvieren. Sieht man ferner unter 1a) und 2b) von den Fällen $i = p + 1$ und $q_1 - k = q$ ab, in welchen $P_3^{(h)}(0, 2m)$ und $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ einen dreikantigen ebenen Zug gemein haben würden, so erhält man folgende den Streifen $S^{(h-1)}$ und $\overline{S}_1$ gemeinsame Flächenreihen:

1a) $\langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_i\rangle_6, \langle\beta_p^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_{i-1}\rangle_6, \langle\beta_{p-1}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\beta_{i-2}\rangle_6, \cdots$

$\cdots, \langle\beta_{p-i+2}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\beta}_1\rangle_6, \quad \langle\beta_{p-i+1}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\alpha}_1\rangle_6,$

2b) $\langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_k\rangle_6, \langle\gamma_1^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{k+1}\rangle_6, \langle\gamma_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{k+2}\rangle_6, \cdots$

$\cdots, \langle\gamma_{q_1-k}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\gamma}_{q_1}\rangle_6, \quad \langle\gamma_{q_1-k+1}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar{\alpha}_1\rangle_6.$

In beiden Fällen bestimmen aber die Polygone $P_3^{(h)}(0, 2m)$ und $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ durch ihre nicht coincidenten Teile das Randpolygon P_0 einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0, welches alle charakteristischen Eigentümlichkeiten des in dem früheren Falle nur einer gemeinsamen Kante von $P_3^{(h)}(0, 2m)$ und $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ behandelten gleichnamigen Polygones aufweist. Es finden daher auf dasselbe und auf die von ihm eingeschlossene Fläche genau die nämlichen Schlüsse wie auf letzteres Anwendung. Zufolge derselben erhält man das Resultat:

Die von dem Polygone P_0 berandete Fläche F_0 ist stets dann und nur dann existent, wenn die Beziehungen bestehen:

1a) $p - i = p_1 - i$ und $q = q_1,$

2b) $q - (q_1 - k + 2) = k - 2$ und $p = p_1,$ oder

1a) $p - p_1 = q - q_1 = 0,$

2b) $q - q_1 = p - p_1 = 0.$

Hiernach ist also das Polygon $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ dem Polygone

$P_3^{(h)}(0, 2m)$ notwendig isomorph, und, weil dann die Annahme $\langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\beta_i\rangle_6$ im Ganzen p, die andere $\langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\gamma_k\rangle_6$ im Ganzen q verschiedene Möglichkeiten zuläfst, giebt es $p+q$ verschiedene ausgezeichnete Lagen der Polygone $P_3^{(h)}(0, 2m)$ und $\overline{P}_3(0, 2m)$ zu einander, in welchen dieselben einen links- bzw. einen rechtsseitigen Kantenzug gemein haben.

III. Die dritte Möglichkeit eines gemeinsamen dreikantigen ebenen Zuges bedingt die Coincidenzen:

$$\langle\alpha_1^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\alpha_1\rangle_6,$$
$$\langle\beta_1^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\beta_1\rangle_6, \quad \langle\beta_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\beta_2\rangle_6, \cdots \quad \text{und}$$
$$\langle\gamma_q^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\gamma_{q_1}\rangle_6, \quad \langle\gamma_{q-1}^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\gamma_{q_1-1}\rangle_6, \cdots.$$

Gilt daher $p > p_1$ oder $q > q_1$, so hat man entsprechend:

$$\langle\bar\beta_{p_1}\rangle_6 \equiv \langle\beta_{p_1}^{(h-1)}\rangle_6 \quad \text{oder} \quad \langle\bar\gamma_1\rangle_6 \equiv \langle\gamma_{q-q_1+1}^{(h-1)}\rangle_6, \quad \text{folglich:}$$
$$\langle\bar\alpha_2\rangle_6 \equiv \langle\beta_{p_1+1}^{(h-1)}\rangle_6 \quad \text{oder} \quad \langle\bar\alpha_2\rangle_6 \equiv \langle\gamma_{q-q_1}^{(h-1)}\rangle_6.$$

Das Polygon $\overline{P}_3(0, 2m_1)$ tritt dann mit einer Kante $|\bar\alpha_2, \beta_{p_1+2}^{(h-1)}|$ oder $|\bar\alpha_2, \gamma_{q-q_1-1}^{(h-1)}|$ in den Gürtel $(P_3'(0, 2m), P_3^{(h)}(0, 2m))$ ein, ein mit der Definition von $P_3^{(h)}(0, 2m)$ unvereinbarer Schlufs.

Ist andererseits $p < p_1$ und $q < q_1$, so hat man:

$$\langle\beta_p^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\beta_p\rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle\gamma_1^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\gamma_{q_1-q+1}\rangle_6,$$

folglich:

$$\langle\bar\beta_{p+1}\rangle_6 \equiv \langle\alpha_2^{(h-1)}\rangle_6 \equiv \langle\bar\gamma_{q_1-q}\rangle_6,$$

was gleichfalls wider die Voraussetzung verstöfst.

Da zufolge der Einteilung des Hexagonoides H_0 in isomorphe Elementarstreifen

$$S' \equiv (P_3', P_3''), \quad S'' \equiv (P_3'', P_3'''), \ldots,$$

alle in Bezug auf das Polygon $P_3^{(h)}(0, 2m)$ gezogenen Schlüsse auch für das Polygon $P_3'(0, 2m)$ gelten, kann man die unter I, II und III erkannten Thatsachen kurz so präcisieren:

Auf einem Elementarhexagonoide H_0 können allomorphe Polygone der Grundform $P_3(0, 2m)$ überhaupt nicht vorkommen. Enthält aber H_0 ein System äquidistanter isomorpher Polygone dieses Typus, so giebt es auf ihm stets noch $m-1$ weitere

jenem isomorphe Systeme, und zwar haben dann die Polygone verschiedener Systeme paarweise einen $(2h+1)$-kantigen links-, bzw. rechtsseitigen Zug gemein,

$$h = 0, 1, 2, 3, \ldots, q,$$
$$p \leq q.$$

Um über die gegenseitige Lage der m Systeme $P_3(0, 2m)$ eine klare Vorstellung zu erhalten, bezeichne man die Flächen der an die Polygone

$$P_3'(0, 2m), \quad P_3''(0, 2m), \ldots$$

grenzenden Elementarstreifen

$$S', S'', S''', \ldots$$

zweckmäſsig durch

$$\begin{aligned}
{}'S &\equiv \langle {}'\alpha_1\rangle_6, \langle {}'\alpha_2\rangle_6, \ldots, \langle {}'\alpha_{p+2}\rangle_6, \ldots, \langle {}'\alpha_m\rangle_6,\\
S' &\equiv \langle \alpha_1'\rangle_6, \langle \alpha_2'\rangle_6, \ldots, \langle \alpha_{p+2}'\rangle_6, \ldots, \langle \alpha_m'\rangle_6,\\
S'' &\equiv \langle \alpha_1''\rangle_6, \langle \alpha_2''\rangle_6, \ldots, \langle \alpha_{p+2}''\rangle_6, \ldots, \langle \alpha_m''\rangle_6,\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\;,
\end{aligned}$$

wo allgemein zwei Flächen $\langle \alpha_1^{(h)}\rangle_6$ und $\langle \alpha_{p+2}^{(h)}\rangle_6$ mit dem Polygone $P_3^{(h)}(0, 2m)$ resp. einen drei- und einen einkantigen Zug gemein haben.

Alsdann werden die mit dem Polygone $P_3'(0, 2m)$ in je einem $(2h+1)$-kantigen Zuge coincidenten, der Fläche $S' + S'' + \cdots$ angehörigen Vertreter $\overline{P}_3(0, 2m)$ der übrigen $m-1$ Systeme dargestellt durch:

$$\begin{gathered}
1)\quad \overline{P}(0, 2m) \equiv \qquad |\, {}'\alpha_i,\ \alpha_i' \,|,\\
|\alpha_{i-1}', \alpha_i'|,\ |\alpha_{i-1}', \alpha_{i-1}''|, \ldots, |\alpha_2^{(i-2)}, \alpha_3^{(i-2)}|,\ |\alpha_2^{(i-2)}, \alpha_2^{(i-1)}|,\\
|\,\alpha_1^{(i-1)}, \alpha_2^{(i-1)}\,|,\quad |\,\alpha_1^{(i-1)}, \alpha_1^{(i)}\,|,\\
|\alpha_m^{(i-1)}, \alpha_m^{(i)}|,\ |\alpha_m^{(i-1)}, \alpha_m^{(i)}|, \ldots, |\alpha_{p+i+2}^{(i-1)}, \alpha_{p+i+3}^{(i)}|,\ |\alpha_{p+i+2}^{(i-1)}, \alpha_{p+i+2}^{(i)}|,\\
|\,\alpha_{p+i+1}^{(i-1)}, \alpha_{p+i+2}^{(i)}\,|,\quad |\,\alpha_{p+i+1}^{(i-1)}, \alpha_{p+i+1}^{(i)}\,|,\quad |\,\alpha_{p+i+1}^{(i-1)}, \alpha_{p+i}^{(i-1)}\,|,\\
|\alpha_{p+i}^{(i-2)}, \alpha_{p+i}^{(i-1)}|,\ |\alpha_{p+i}^{(i-2)}, \alpha_{p+i-1}^{(i-2)}|, \ldots, |\alpha_{p+3}', \alpha_{p+3}''|,\ |\alpha_{p+3}', \alpha_{p+2}'|,\\
|\,{}'\alpha_{p+2}, \alpha_{p+2}'|,\ |\,{}'\alpha_{p+2}, \alpha_{p+1}'|, \ldots, |\,{}'\alpha_{i+1}, \alpha_{i+1}'|,\ |\,{}'\alpha_{i+1}, \alpha_i'|,\\
i = 2, 3, \ldots, p+2,\\
p + i + 2 = k.
\end{gathered}$$

2) wenn abkürzungsweise $p + i + 2 = k$ gesetzt wird,

$$\overline{P}_3(0, 2m) \equiv \qquad |\,'\alpha_k,\ \alpha'_k\,|,$$

$$|\,'\alpha_{k-1},\ \alpha'_k\,|,\quad |\,'\alpha_{k-1},\ \alpha'_{k-1}\,|, \ldots, \quad |\,'\alpha_{p+3},\ \alpha'_{p+4}\,|,\quad |\,'\alpha_{p+3},\ \alpha'_{p+3}\,|,$$

$$|\,'\alpha_{p+2},\ \alpha'_{p+3}\,|,\quad |\,'\alpha_{p+2},\ \alpha'_{p+2}\,|;$$

a) $k - q > 2$

$$|\,\alpha'_{p+1},\ \alpha'_{p+2}\,|,\quad |\,\alpha'_{p+1},\ \alpha''_{p+1}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha^{(q-i)}_{k-q},\ \alpha^{(q-i)}_{k-q+1}\,|,\quad |\,\alpha^{(q-i)}_{k-q},\ \alpha^{(q-i+1)}_{k-q}\,|,$$

$$|\,\alpha^{(q-i+1)}_{k-q+1},\ \alpha^{(q-i+1)}_{k-q}\,|,\quad |\,\alpha^{(q-i+1)}_{k-q-1},\ \alpha^{(q-i+2)}_{k-q-1}\,|,\quad |\,\alpha^{(q-i+1)}_{k-q-1},\ \alpha^{(q-i+2)}_{k-q-2}\,|,$$

$$|\,\alpha^{(q-i+1)}_{k-q-2},\ \alpha^{(q-i+2)}_{k-q-2}\,|,\quad |\,\alpha^{(q-i+1)}_{k-q-2},\ \alpha^{(q-i+2)}_{k-q-3}\,|, \ldots, |\,\alpha_2^{(q-i+1)},\ \alpha_2^{(q-i+2)}\,|,\quad |\,\alpha_2^{(q-i+1)},\ \alpha_1^{(q-i+2)}\,|,$$

$$|\,\alpha_1^{(q-i+1)},\ \alpha_1^{(q-i+2)}\,|,\quad |\,\alpha_1^{(q-i+1)},\ \alpha_m^{(q-i+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_m^{(q-i)},\ \alpha_m^{(q-i+1)}\,|,\quad |\,\alpha_m^{(q-i)},\ \alpha_{m-1}^{(q-i)}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha'_{k+1},\ \alpha''_{k+1}\,|,\quad |\,\alpha'_{k+1},\ \alpha'_k\,|;$$

b) $k - q = 2$

$$|\,\alpha'_{p+1},\ \alpha'_{p+2}\,|,\quad |\,\alpha'_{p+1},\ \alpha''_{p+1}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha_2^{(q-i)},\ \alpha_3^{(q-i)}\,|,\quad |\,\alpha_2^{(q-i)},\ \alpha_2^{(q-i+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_1^{(q-i+1)},\ \alpha_2^{(q-i+1)}\,|,\quad |\,\alpha_1^{(q-i+1)},\ \alpha_1^{(q-i+2)}\,|,\quad |\,\alpha_1^{(q-i+1)},\ \alpha_m^{(q-i+2)}\,|,$$

$$|\,\alpha_m^{(q-i+1)},\ \alpha_1^{(q-i+1)}\,|,\quad |\,\alpha_m^{(q-i+1)},\ \alpha_m^{(q-i+2)}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha'_{k+1},\ \alpha''_{k+1}\,|,\quad |\,\alpha'_{k+1},\ \alpha'_k\,|;$$

c) $k - q \leqq 1$

$$|\,\alpha'_{p+1},\ \alpha'_{p+2}\,|,\quad |\,\alpha'_{p+1},\ \alpha''_{p+1}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha_2^{(p)},\ \alpha_3^{(p)}\,|,\quad |\,\alpha_2^{(p)},\ \alpha_2^{(p+1)}\,|,$$

$$|\,\alpha_1^{(p+1)},\ \alpha_2^{(p+1)}\,|,\quad |\,\alpha_1^{(p+1)},\ \alpha_1^{(p+2)}\,|,$$

$$|\,\alpha_m^{(p+1)},\ \alpha_m^{(p+2)}\,|,\quad |\,\alpha_m^{(p+1)},\ \alpha_m^{(p+2)}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha^{(p+1)}_{k+p+3},\ \alpha^{(p+2)}_{k+p+3}\,|,\quad |\,\alpha^{(p+1)}_{k+p+2},\ \alpha^{(p+2)}_{k+p+2}\,|,$$

$$|\,\alpha^{(p+1)}_{k+p+1},\ \alpha^{(p+2)}_{k+p+2}\,|,\quad |\,\alpha^{(p+1)}_{k+p+1},\ \alpha^{(p+2)}_{k+p+1}\,|,\quad |\,{}^{(p+1)}_{k+p+1},\ \alpha^{(p+1)}_{k+p}\,|,$$

$$|\,\alpha^{(p)}_{k+p},\ \alpha^{(p+1)}_{k+p}\,|,\quad |\,\alpha^{(p)}_{k+p},\ \alpha^{(p)}_{k+p-1}\,|, \ldots, \quad |\,\alpha'_{k+1},\ \alpha''_{k+1}\,|,\quad |\,\alpha'_{k+1},\ \alpha'_k\,|$$

$$k = p + 3,\ p + 4,\ \ldots,\ m.$$

An das gewonnene Resultat der Erkenntnis aller Elementarpolygone als Nachbarpolygone dreier charakteristischen Formen P_1, P_2, P_3 schliefst sich naturgemäfs die Frage, ob mit denselben die letzten ursprünglichen Typen des Elementarpolygones erreicht sind, oder ob noch eine weitere Reduktion möglich ist.

Um dieses Problem zu entscheiden, werde ein Elementarhexagonoid H_0 mit einem Grundpolygone $P_2(0, 2p+2q+6=2m)$ betrachtet. Die Flächen des ersten an letzteres grenzenden Elementarstreifens seien

$$\langle\alpha_0'\rangle_6,\ \langle\beta_1'\rangle_6,\ \langle\beta_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_p'\rangle_6,\ \langle\alpha_1'\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_2'\rangle_6,\ \langle\gamma_1'\rangle_6,\ \langle\gamma_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_q'\rangle_6,$$

wo das Polygon $P_2(0, 2m)$ mit den Flächen $\langle\alpha_0'\rangle_6$ und $\langle\alpha_1'\rangle_6$, $\langle\alpha_2'\rangle_6$ resp. einen vier- und zwei einkantige Züge gemein hat. — Durch Fortlassung der Flächen

$$\langle\alpha_0'\rangle_6,\ \langle\beta_1'\rangle_6,\ \langle\beta_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_p'\rangle_6$$

erhält man als Grundpolygon der resultierenden Fläche H_0' ein zu $P_2(0, 2m)$ benachbartes Polygon P' mit dem angrenzenden Elementarstreifen

$$S' \equiv \langle\gamma_q'\rangle_6,\ \langle\beta_1''\rangle_6,\ \langle\beta_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_{p-1}''\rangle_6,\ \langle\alpha_1''\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_1'\rangle_6,\ \langle\alpha_2'\rangle_6,\ \langle\gamma_1'\rangle_6,\ \langle\gamma_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_{q-1}'\rangle_6,$$

von welchem die Flächen $\langle\gamma_q'\rangle_6$ und $\langle\alpha_1''\rangle_6$, $\langle\alpha_2'\rangle_6$ resp. einen vier- und zwei einkantige, alle übrigen Flächen aber je einen zweikantigen Zug des Polygones P' enthalten. — Nach weiterem Ausschlufs der Flächen

$$\langle\gamma_q'\rangle_6,\ \langle\beta_1''\rangle_6,\ \langle\beta_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_{p-1}''\rangle_6$$

resultiert als Berandung der entstehenden Fläche H_0'' ein Polygon P'' mit dem angrenzenden Elementarstreifen

$$S'' \equiv \langle\gamma_{q-1}'\rangle_6,\ \langle\beta_1'''\rangle_6,\ \langle\beta_2'''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_{p-2}'''\rangle_6,\ \langle\alpha_1'''\rangle_6,\ \langle\alpha_1''\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_1'\rangle_6,\ \langle\alpha_2'\rangle_6,\ \langle\gamma_1'\rangle_6,\ \langle\gamma_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\gamma_{q-2}'\rangle_6,$$

von welchem die Flächen $\langle\gamma_{q-1}'\rangle_6$ und $\langle\alpha_1'''\rangle_6$, $\langle\alpha_2'\rangle_6$ mit P'' resp. einen vierkantigen und zwei einkantige Züge, alle übrigen aber je einen zweikantigen Zug gemein haben.

Ist nun erstens $p = q$, so wird man vermöge dieser Reduktion der Fläche H_0 schliefslich zu einer anderen $H_0^{(p)}$ gelangen, an deren Grundpolygon $P^{(p)}$ ein Elementarstreifen grenzt,

$$S^{(p)} \equiv \langle\gamma_1'\rangle_6,\ \langle\alpha_1^{(p+1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_1^{(p)}\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\alpha_1''\rangle_6,\ \langle\alpha_1'\rangle_6,\ \langle\alpha_2'\rangle_6,$$

von dessen $p + 3$ Flächen die eine $\langle\gamma_1'\rangle_6$ einen vierkantigen, die beiden benachbarten $\langle\alpha_1^{(p+1)}\rangle_6$ und $\langle\alpha_2'\rangle_6$ je einen einkantigen, alle übrigen je einen zweikantigen Randzug enthalten.

Indem man aber von dieser Fläche $H_0^{(p)}$ das Sechseck $\langle\gamma_1'\rangle_6$ fortläſst, erhält man als Berandung der restierenden Fläche $H_0^{(p+1)}$ ein Elementarpolygon $P_1(0, 2p + 4)$ der ersten Grundform. Also:

Jedes Elementarpolygon $P_2(0, 4p + 6)$ ist einem Elementarpolygone $P_1(0, 2p + 4)$ benachbart, und es tritt daher auf dem zugehörigen Hexagonoide in $p + 2$ verschiedenen Systemen äquidistanter Polygone auf.

Ist dagegen zweitens $p < q$, so besitzt das Polygon $P^{(p)}$ den angrenzenden Elementarstreifen

$$S^{(p)} \equiv \langle\gamma'_{q-p+1}\rangle_6, \langle\alpha_1^{(p+1)}\rangle_6, \langle\alpha_1^{(p)}\rangle_6, \ldots, \langle\alpha_1''\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_1'\rangle_6, \langle\alpha_2'\rangle_6, \langle\gamma_1'\rangle_6, \langle\gamma_2'\rangle_6, \ldots, \langle\gamma'_{q-p}\rangle_6,$$

und es wird die Ausscheidung der Fläche $\langle\gamma'_{q-p+1}\rangle_6$ als Randpolygon von $H_0^{(p+1)}$ ein Elementarpolygon $P^{(p+1)}$ ergeben, von welchem die $\langle\gamma'_{q-p+1}\rangle_6$ benachbarten Flächen $\langle\gamma'_{q-p}\rangle_6$ und $\langle\alpha_1^{(p+1)}\rangle_6$ resp. einen drei- und einen zweikantigen Zug enthalten. Dann aber stellt sich $P^{(p+1)}$ als ein Polygon der Grundform $P_3(0, 2p_1 + 2q_1 + 4)$ dar, wo sich $p_1 = p + 1$ und $q_1 = q - p - 1$ berechnet. Also:

Ein Elementarpolygon $P_2(0, 2p + 2q + 6)$ ist allemal einem Elementarpolygone $P_3(0, 2q + 4)$ benachbart, und es tritt daher auf dem zugehörigen Hexagonoide H_0 in $q + 2$ verschiedenen Systemen äquidistanter Polygone auf.

Zieht man noch aus der eindeutigen Abhängigkeit der für zwei benachbarte Polygone $P_2(0, 2m)$ und $P_3(0, 2m_1)$ charakteristischen Zahlenpaare p, q und p_1, q_1 den Schluſs, daſs auf demselben Hexagonoide H_0 allomorphe Polygone $P_2(0, 2m)$ und $P_2(0, 2m_1)$ unmöglich sind, so kann man, alles zusammenfassend, folgendes Endergebnis aussprechen:

Theorem 14. *Jedes Elementarpolygon ist Nachbarpolygon eines durch zwei positive ganze Zahlen p, q unzweideutig definierten Polygones der Grundform*

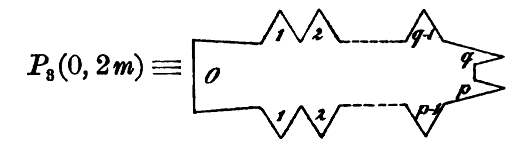
$$P_2(0, 2m) \equiv$$

$$p, q = 1, 2, \ldots,$$

und hat deshalb die Charakteristik 0.

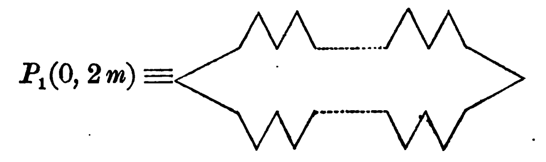
Alle dem nämlichen Polygone $P_2(0, 2m)$ *benachbarten, mit ihm also auf demselben Hexagonoide* H_0 *gelegenen Elementarpolygone konstituieren eine Klasse.*

Ist $p_1 < q_1$, *so enthält das zum Polygone* $P_2(0, 2m_1)$ *gehörige Hexagonoid* $q_1 + 2$ *unendliche Systeme äquidistanter isomorpher Elementarpolygone der Form:*



wo sich $p = p_1 + 1$ *und* $q = q_1 - p_1 - 1$ *berechnet, und dann gruppieren sich alle mit* $P_2(0, 2m_1)$ *isomorphen Polygone gleichfalls in* $q_1 + 2$ *analoge Systeme.*

Im Falle $p_1 = q_1$ *dagegen enthält das betreffende Hexagonoid ein einziges unendliches System äquidistanter isomorpher Polygone der Form:*



wo sich $m = p_1 + 2 = \frac{m_1 + 1}{2}$ *bestimmt, und dann gruppieren sich alle mit* $P_2(0, 2m_1)$ *isomorphen Polygone in* $p_1 + 2$ *analoge Systeme.*

Angenommen jetzt, es liege auf einem Elementarhexagonoide H_0 ein System von Polygonen $P_1(0, 2m)$ und ein beliebiges Polygon $P(0, 2n)$ vor, so werden auf H_0 zwei Polygone $P'(0, 2m)$ und $P^{(h)}(0, 2m)$ existieren, die mit $P(0, 2n)$

mindestens je einen Kantenzug gemein haben und es in einen aus $h-1$ isomorphen Elementarstreifen

$$S' \equiv P'P'', \; S'' \equiv P''P''', \; \ldots, \; S^{(h-1)} \equiv P^{(h-1)}P^{(h)}$$

bestehenden Gürtel einschliefsen. Wenn dann durch die Kantenfolge

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \; |\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2|, \; |\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3|, \; \ldots, \; |\mathfrak{b}_{i-1}, \mathfrak{b}_i|, \; |\mathfrak{b}_i, \mathfrak{a}_i|$$

ein Zug des Polygones $P(0, 2n)$ gegeben ist, dessen Endpunkte $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_i$ zwar noch zum Polygone $P^{(h-1)}(0, 2m)$ gehören, während seine übrigen Ecken auf $P^{(h)}(0, 2m)$ liegen, so wird nach Ersetzung dieses durch den zu $P^{(h-1)}(0, 2m)$ gehörigen Zug

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2|, \; |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|, \; \ldots, \; |\mathfrak{a}_{i-1}, \mathfrak{a}_i|$$

das resultierende Polygon zwei Kanten weniger als das ursprüngliche enthalten.

Falls daher $P(0, 2n)$ mit $P^{(h)}(0, 2m)$ mehrere, etwa a, getrennte Züge gemein hat, kann man ein nur noch über $h-2$ Elementarstreifen erstrecktes Polygon $P(0, 2n-2a)$ konstruieren.

Daraus folgt:

Unter allen Polygonen des Hexagonoides H_0 enthalten die Polygone $P_1(0, 2m)$ die kleinste Zahl von Kanten, während ein h Elementarstreifen durchlaufendes Elementarpolygon $P(0, 2n)$ mindestens $2m + 2h$ Kanten zählt.

Ganz analog wird bewiesen:

Auf einem Hexagonoide H_0 mit einem Systeme von Polygonen $P_3(0, 2m)$ haben diese die kleinste Kantenanzahl.

Wie die Kantenpolygone eines Hexagonoides H_6, so zeigen auch die Elementarpolygone eines Hexagonoides H_0 die Eigenschaft der Irreducibilität, und zwar in doppeltem Sinne: einerseits nämlich in ihren Beziehungen zu den auf einer Fläche H_6 gelegenen Polygonen $P(6, n)$, andererseits in der gegenseitigen gestaltlichen Abhängigkeit der einer Klasse, d. h. demselben Elementarhexagonoid H_0 angehörigen Polygone $P(0, 2m)$.

Was zunächst das Verhältnis der Polygone $P(0, 2m)$

einer Fläche H_0 zu deren Polygonen $P(6, n)$ anlangt, so findet dasselbe seinen Ausdruck in folgendem Satze:

14a. *Ein Elementarhexagonoid H_0 mit einem Grundpolygone $P_\varepsilon(0, 2m)$ $(\varepsilon = 1, 3)$ kann kein Elementarpolygon $P(0, 2m_1)$ enthalten, welches in einem Kantenzuge irgend einem Polygone $P(6, n)$ eines Hexagonoides H_6 isomorph ist, das der aus der Grundfläche von H_6 und den ersten $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ angrenzenden Elementarstreifen gebildeten Fläche $\overline{H}_6$ angehört.*

Es genügt, den Beweis für ein Hexagonoid H_0 mit einem Polygonensysteme $P_1(0, 2m)$ zu führen, indem der andere Fall einer Fläche H_0 mit einem Systeme $P_3(0, 2m)$ eine durchaus analoge Behandlungsweise gestattet.

Man wähle zu dem Ende auf einem Hexagonoide H_0 mit dem Grundpolygone

$$P_1(0, 2m) \equiv |\, \alpha_1', {}'\alpha_1 \,|, \ |\, \alpha_2', {}'\alpha_1 \,|, \ |\, \alpha_2', {}'\alpha_2 \,|, \ |\, \alpha_3', {}'\alpha_2 \,|, \ \ldots, |\, \alpha_m', {}'\alpha_m \,|, \ |\alpha_1', {}'\alpha_m\,|$$

das Sechseck $\langle\alpha_1'\rangle_6$ zur Grundfläche eines Hexagonoides H_6, so wird sich letzteres bis incl. seines von $\langle\alpha_1'\rangle_6$ aus gezählten $\left[\frac{m-1}{2}\right]^{\text{ten}}$ Elementarstreifens isomorph auf H_0 abbilden lassen. Es sei nun auf diesem Teile $\overline{H}_6$ von H_0 irgend ein Polygon $P(6, n)$ gegeben, und es stelle $P'(0, n_1)$ irgend ein auf H_0 gezogenes Elementarpolygon vor, welches den dem ersteren isomorphen Kantenzug Q enthält. Man bestimme dann innerhalb der Fläche $(\langle\alpha_1'\rangle_6, P(6, n))$, ausgehend von $\langle\alpha_1'\rangle_6$, in der Flächenreihe

$$\langle\alpha_1'\rangle_6, \ \langle\alpha_2'\rangle_6, \ \langle\alpha_3'\rangle_6, \ \ldots,$$

in welcher allgemein zwei Flächen $\langle\alpha'_{h-1}\rangle_6$ und $\langle\alpha'_{h+1}\rangle_6$ durch gegenüberliegende Seiten der Fläche $\langle\alpha_h'\rangle_6$ gehen, die erste Fläche $\langle\alpha_r'\rangle_6$, welche einen Kantenzug des Polygones $P(6, n)$ enthält. Da die Zahl r höchstens gleich der Zahl $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ ist, so kann man von der durch den entsprechenden Kantenzug in Q bestimmten Fläche $\langle\beta_r\rangle_6$ aus eine jener isomorphe Flächenreihe ableiten:

$$\langle\beta_r\rangle_6, \ \langle\beta_{r-1}\rangle_6, \ \ldots, \ \langle\beta_1\rangle_6.$$

Zufolge des Isomorphismus der zu den Flächen $\langle\alpha_1'\rangle_6$ und $\langle\beta_1\rangle_6$ gehörigen Hexagonoidteile in Bezug auf ihre ersten $\left[\frac{m-1}{2}\right]$ Elementarstreifen mufs sich aber der Zug Q zu dem $P(6, n)$ isomorphen Polygone $Q(6, n)$ schliefsen. Mithin kann ein Zug Q kein Teil eines Polygones $P'(0, n_1)$ sein. Q. e. d.

Die vorstehende Überlegung lehrt gleichzeitig *folgende bemerkenswerte Erzeugungsweise eines Elementarhexagonoides H_0 aus einer hexagonoidischen Fläche H_6.*

Man variiere, wenn unter Wiederaufnahme der § 18 eingeführten Bezeichnungen die Flächen der sechs dreikantigen ebenen Züge des den Elementarstreifen $S^{(m)}$ berandenden Polygones $P^{(m)}$ in der einem Umlauf von $P^{(m)}$ entsprechenden Folge gegeben werden durch

$$\langle\alpha_1^{(m)}\rangle_6,\ \langle\alpha_{1+m}^{(m)}\rangle_6,\ \langle\alpha_{1+2m}^{(m)}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\alpha_{1+5m}^{(m)}\rangle_6,$$

die aus der Grundfläche $\langle\alpha_0\rangle_6$ und den ersten m Elementarstreifen bestehende Fläche $\overline{H}_6$ so stetig und sich selbst isomorph im Raume,

1) dafs die mittleren Randkanten zweier gegenüberliegenden Flächen

$$\langle\alpha_1^{(m)}\rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle\alpha_{1+3m}^{(m)}\rangle_6$$

a) Gegenseiten eines ebenen Sechseckes $\langle\varphi\rangle_6$ werden,

b) in eine Kante $|\ \alpha_1^{(m)},\ \alpha_{1+3m}^{(m)}\ |$ zusammenfallen,

2a) dafs die mittleren Randkanten der Flächen $\langle\alpha_1^{(m)}\rangle_6$ und $\langle\alpha_{1+4m}^{(m)}\rangle_6$ in zwei durch eine dritte getrennte Seiten eines ebenen Sechseckes $\langle\varphi\rangle_6$ übergehen,

2b) dafs der mit der mittleren Randkante von $\langle\alpha_1^{(m)}\rangle_6$ beginnende und in der ersten Randkante von $\langle\alpha_r^{(m)}\rangle_6$ endende $(2r-1)$-kantige Zug und der mit der ersten Randkante von $\langle\alpha_{r+3m}^{(m)}\rangle_6$ beginnende und in der mittleren Randkante von $\langle\alpha_{1+3m}^{(m)}\rangle_6$ endende $(2r-1)$-kantige Zug entsprechend zusammenfallen

$$r = m+1,\ m, \ldots, 2,$$

wo in den Fällen 2a) und 2b) die Kanten des Polygones $P^{(m)}(6, 12m+6)$ in der Reihenfolge gezählt sind,

$$|\ \alpha_1^{(m)},\ \alpha_{6m+6}^{(m+1)}\ |,\quad |\ \alpha_1^{(m)},\ \alpha_1^{(m+1)}\ |,\quad |\ \alpha_1^{(m)},\ \alpha_2^{(m+1)}\ |,\ \cdots.$$

Durch diese Operation entstehen

1a) ein Elementarhexagonoid mit einem Grundpolygone

$$P_1(0, 4m + 4),$$

1b) ein Elementarhexagonoid mit einem Grundpolygone

$$P_1(0, 4m + 2),$$

2a) ein Elementarhexagonoid mit einem durch die Werte $p = q = m$ bestimmten Grundpolygone

$$P_3(0, 4m + 4),$$

2b)*) ein Elementarhexagonoid mit einem durch die Werte $p = r - 2$ und $q = 2m - r + 1$ bestimmten Grundpolygone

$$P_3(0, 4m + 2).$$

Zu einer noch engeren Unterscheidung der Elementarpolygone eines Hexagonoides H_0 in irreducibele und reducibele führt, wie schon oben bemerkt, deren vergleichsweise Betrachtung. Ich werde mich jedoch in den betreffenden Untersuchungen auf den einfacheren Fall eines Elementarhexagonoides mit einem Polygonensysteme $P_1(0, 2m)$ beschränken.

Um zuerst die hierher gehörigen Beziehungen der allgemeinen Elementarpolygone $P(0, 2n)$ der Fläche zu einem Grundpolygone $P_1(0, 2m)$ abzuleiten, teile man das Hexagonoid H_0 von letzterem aus in gleicher Weise wie früher in Elementarstreifen:

$$\begin{array}{l} \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 'S \equiv \langle '\alpha_1 \rangle_6,\ \langle '\alpha_2 \rangle_6,\ \ldots,\ \langle '\alpha_m \rangle_6, \\ S' \equiv \langle \alpha_1' \rangle_6,\ \langle \alpha_2' \rangle_6,\ \ldots,\ \langle \alpha_m' \rangle_6, \\ S'' \equiv \langle \alpha_1'' \rangle_6,\ \langle \alpha_2'' \rangle_6,\ \ldots,\ \langle \alpha_m'' \rangle_6, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;, \end{array}$$

*) Man gelangt zu diesem Polygone, indem man von der zur Fläche $\overline{H}_0$ geschlossenen Fläche $\overline{H}_6$ successive die r Flächenreihen absondert, nämlich die Reihen

$$\begin{array}{c} \langle \alpha^{(m)}_{1+4m} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m)}_{2+4m} \rangle_6,\ \ldots,\ \langle \alpha^{(m)}_{1+5m} \rangle_6, \\ \langle \alpha^{(m)}_{4m} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m-1)}_{4m-3} \rangle_6,\ \ldots,\ \langle \alpha^{(m-1)}_{5m-4} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m)}_{2+5m} \rangle_6, \\ \langle \alpha^{(m)}_{4m-1} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m-1)}_{4m-4} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m-2)}_{4m-7} \rangle_6,\ \ldots,\ \langle \alpha^{(m-2)}_{5m-9} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m-1)}_{5m-3} \rangle_6,\ \langle \alpha^{(m)}_{3+5m} \rangle_6 \\ \cdot\;, \end{array}$$

und an das eine Randpolygon der entstehenden Fläche ein $\langle \alpha_1^{(\mu)} \rangle_6$ und $\langle \alpha^{(\mu)}_{r+3m} \rangle$ seitendes Sechseck ansetzt.

wo allgemein zwei Flächen $\langle\alpha_i^{(h-1)}\rangle_6$ und $\langle\alpha_i^{(h+1)}\rangle_6$ Scheitelflächen, zwei Flächen $\langle\alpha_i^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\alpha_{i\pm 1}^{(h)}\rangle_6$ Seitenflächen bezeichnen, und wo die Flächen $\langle\alpha_m'\rangle_6$, $\langle\alpha_1''\rangle_6$, $\langle\alpha_1'\rangle_6$ eine Ecke bestimmen.

Die Kanten des von den Polygonen $P_1(0, 2m)$ und $P_1^{(m)}(0, 2m)$ berandeten, m Streifen umfassenden Gürtels G_m zerfallen in zwei Systeme:

1) in die gemeinsamen Randkanten $|\,\alpha_i^{(h)}, \alpha_k^{(h+1)}\,|$ zweier benachbarten Elementarstreifen,

2) in die gemeinsamen Seiten $|\,\alpha_i^{(h)}, \alpha_{i\pm 1}^{(h)}\,|$ zweier Nachbarflächen eines Streifens.

Die Kanten des ersten Systemes sind dadurch ausgezeichnet, dafs der zu einer von ihnen gehörige rechts- bzw. linksseitige Kantenzug mit dem die beiden Elementarstreifen trennenden Polygone $P_1^{(h)}(0, 2m)$ identisch ist, die des zweiten dadurch, dafs der zu einer von ihnen, etwa zu $|\,\alpha_i^{(h)}, \alpha_{i+1}^{(h)}\,|$, gehörige rechts- bzw. linksseitige Zug sich durch die m Streifen $S^{(h)}, \ldots, S^{(h+m-1)}$ hinzieht. Es werden mithin die zu den m Kanten

$$|\,\alpha_m', \alpha_1'\,|, \quad |\,\alpha_1', \alpha_2'\,|, \ldots, |\,\alpha_{m-1}', \alpha_m'\,|$$

gehörigen rechts- bzw. linksseitigen Kantenzüge die einzigen $2m$-kantigen Züge der Art enthalten, welche, ohne sich zu schliefsen, ganz innerhalb des Gürtels G_m verlaufen. Schliefst man aber einen solchen Zug durch einen gleichfalls in G_m enthaltenen sich selbst nicht durchsetzenden Zug zu einem Elementarpolygone, etwa den Zug

$$|\alpha_m', \alpha_1'|, \ |\alpha_1'', \alpha_1'|, \ldots, |\alpha_\mu^{(m)}, \alpha_{\mu+1}^{(m)}|, \ |\alpha_\mu^{(m+1)}, \alpha_{\mu+1}^{(m)}|$$
$$(m = 2\mu)$$

durch den Zug

$$|\,\alpha_m', {}'\alpha_1\,|, \ |\,\alpha_m', {}'\alpha_m\,|, \ldots, |\,\alpha_{\mu+1}^{(m)}, \alpha_{\mu+1}^{(m+1)}\,|,$$

so werden die Endkanten des ursprünglichen $2m$-kantigen rechtsseitigen Zuges resp. erste und zweite Kante zweier mindestens dreikantigen ebenen Züge des Polygones. Mit Hülfe der einzuführenden Bezeichnung eines zwischen den ersten Kanten zweier zwei- oder mehrkantigen ebenen Züge erstreckten *Bestandteiles* eines Elementarpolygones als eines *Elementarzuges* kann man daher sagen:

Auf einem Elementarhexagonoide mit einem Grundpolygone $P_1(0, 2m)$ existiert unter den Elementarpolygonen eines aus m Elementarstreifen bestehenden Gürtels G_m kein einziges, welches einen dem Grundpolygone isomorphen Elementarzug enthält.

Diese Beziehung eines beliebigen Elementarpolygones zum Grundpolygone ist offenbar durch seine Zugehörigkeit zum Gürtel G_m bedingt. Denn erweitert man letzteren um einen $m+1^{\text{ten}}$ Elementarstreifen $S^{(m+1)}$, so ist das Elementarpolygon

$$|\alpha_m', \alpha_1'|, \quad |\alpha_1'', \alpha_1'|, \ldots, |\alpha_\mu^{(m)}, \alpha_{\mu+1}^{(m)}|, \quad |\alpha_\mu^{(m+1)}, \alpha_{\mu+1}^{(m)}|,$$
$$|\alpha_\mu^{(m+1)}, \alpha_{\mu+1}^{(m+1)}|, \quad |\alpha_{\mu+1}^{(m+2)}, \alpha_{\mu+1}^{(m+1)}|, \ldots, |{}'\alpha_m, \alpha_m'|$$

in seinem ersten Zuge dem Grundpolygone isomorph.

Die aufgefundene Beziehung läſst sich leicht auf zwei beliebige Elementarpolygone des Gürtels G_m ausdehnen und sich so zu dem Satze erweitern:

14b. *Auf einem Elementarhexagonoid mit einem Grundpolygone $P_1(0, 2m)$ kann von zwei einem Gürtel G_m angehörigen allomorphen Elementarpolygonen das eine keinen dem anderen isomorphen Elementarzug enthalten.*

Zum Beweise werde vorausgesetzt, derselbe sei bereits für alle Elementarpolygone $P(0, 2n)$ erbracht, welche sich über nicht mehr als $\nu < m$ aneinander grenzende Elementarstreifen erstrecken. Wenn dann das Elementarpolygon

$$\begin{aligned} Q(0, 2n_1) \equiv |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, \quad |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|, \ldots, |\mathfrak{p}_{i-1}, \mathfrak{p}_i|, |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{a}_1|, \\ |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \quad |\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2|, \quad |\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3|, \ldots, |\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{b}_k|, \\ |\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_k|, \quad |\mathfrak{a}_k, \mathfrak{q}_l|, \quad |\mathfrak{q}_l, \mathfrak{q}_{l-1}|, \ldots, |\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1|, \\ (\mathfrak{p}_1 \equiv \mathfrak{q}_1), \end{aligned}$$

welches mit dem Kantenzuge

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \quad |\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2|, \ldots, |\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{b}_k|, \quad |\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_k|$$

einem $\nu + 1^{\text{ten}}$ Elementarstreifen angehört, isomorph ist einem Elementarteile

$$|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'|, \quad |\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'|, \ldots, |\mathfrak{p}_i', \mathfrak{a}_1'|, \quad |\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1'|, \ldots,$$
$$\ldots, |\mathfrak{b}_k', \mathfrak{a}_k'|, \quad |\mathfrak{a}_k', \mathfrak{q}_l'|, \quad |\mathfrak{q}_l', \mathfrak{q}_{l-1}'|, \ldots, |\mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_1'|$$

eines zweiten zum Gürtel G_m gehörigen Elementarpolygones

$$P(0,2n') \equiv \cdots, |\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'|, |\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'|, \ldots, |\mathfrak{p}_i', \mathfrak{a}_1'|, |\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1'|, \ldots,$$
$$\ldots, |\mathfrak{b}_k', \mathfrak{a}_k'|, |\mathfrak{a}_k', \mathfrak{q}_l'|, |\mathfrak{q}_l', \mathfrak{q}_{l-1}'|, \ldots, |\mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_1'|, \ldots,$$

so ersetze man in beiden Polygonen die isomorphen Züge

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \ |\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2|, \ldots, |\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{b}_k|, \ |\mathfrak{b}_k, \mathfrak{a}_k| \quad \text{und}$$
$$|\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1'|, \ |\mathfrak{b}_1', \mathfrak{b}_2'|, \ldots, |\mathfrak{b}_{k-1}', \mathfrak{b}_k'|, \ |\mathfrak{b}_k', \mathfrak{a}_k'|$$

durch die anderen gleichfalls isomorphen und in G_m verlaufenden Züge

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2|, \ |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3|, \ldots, |\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{a}_k| \quad \text{und}$$
$$|\mathfrak{a}_1', \mathfrak{a}_2'|, \ |\mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3'|, \ldots, |\mathfrak{a}_{k-1}', \mathfrak{a}_k'|,$$

von denen der erste zu dem Randpolygone $P_1^{(\nu)}(0, 2m)$ des ν^{ten} Elementarstreifens gehört. Eine analoge Reduktion findet auch dann statt, wenn *einem* Eckpunkte des Zuges

$$|\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2|, \ |\mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3|, \ldots, |\mathfrak{b}_{k-1}, \mathfrak{b}_k|$$

die beiden Endpunkte des $Q(0, 2n_1)$ isomorphen Elementarzuges von $P(0, 2n')$ entsprechen.

Durch genügend häufige Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man zu einem nur noch ν Elementarstreifen durchziehenden Polygone

$$Q(0, 2n_2) \equiv |\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2|, \ |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3|, \ldots, |\mathfrak{p}_i, \mathfrak{a}_1|, \ |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2|, \ldots$$
$$\cdots, |\mathfrak{a}_{k-1}, \mathfrak{a}_k|, |\mathfrak{a}_k, \mathfrak{q}_l|, \ |\mathfrak{q}_l, \mathfrak{q}_{l-1}|, \ldots, |\mathfrak{q}_2, \mathfrak{q}_1|,$$

welches isomorph ist einem Elementarzuge

$$|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'|, \ |\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'|, \ldots, |\mathfrak{q}_3', \mathfrak{q}_2'|, \ |\mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_1'|$$

eines zweiten zu G_m gehörigen Elementarpolygones

$$P(0, 2n'') \equiv \cdots, |\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_2'|, \ |\mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'|, \ldots, |\mathfrak{q}_3', \mathfrak{q}_2'|, \ |\mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_1'|, \cdots$$

Weil aber die Coexistenz zweier derartiger Polygone durch die Voraussetzung ausgeschlossen wird, so gilt das auch für die Polygone $Q(0, 2n_1)$ und $P(0, 2n')$.

Die unter 14b aufgestellte Behauptung ist somit gültig, wenn sie für das Grundpolygon $P_1(0, 2m)$ und ein beliebiges Elementarpolygon des Gürtels G_m zu Recht besteht. Hiermit aber ist der Satz auf den schon früher bewiesenen Spezialfall zurückgeführt. —

Die Theorie der Elementarpolygone findet ihren Abschlufs mit der Entscheidung der Frage:

Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dafs ein Kantenpolygon P ein Elementarpolygon sei?

Da man gemäfs der Definition der Elementarpolygone und des sie betreffenden Theoremes 14 die Untersuchung von vorneherein auf die höchstens fünfkantige ebene Züge enthaltenden Polygone der Charakteristik $c = 0$ zu beschränken hat, werde ein derartiges Polygon $P(0, 2m)$ der Betrachtung zu Grunde gelegt. Dasselbe kann seiner Form nach von vierfacher Beschaffenheit sein:

1a) Entweder sind alle ebenen Kantenzüge zweikantig,

1b) oder es folgt auf einen etwaigen dreikantigen ebenen Zug der Charakteristik ± 1 ein isomorpher Zug der Charakteristik ∓ 1,

— in beiden Fällen ist $P(0, 2m)$ ein Normalpolygon im Sinne des § 16 —,

2a) oder es folgt auf einen dreikantigen ebenen Zug der Charakteristik ± 1 ein isomorpher Zug der Charakteristik ± 1,

2b) oder es treten auch vier- und fünfkantige ebene Züge auf.

Indem man in dem Falle 2a) einen Zug

durch den anderen

in dem Falle 2b) einen vier- bzw. fünfkantigen ebenen Zug durch die fünfte und sechste bzw. die sechste Seite des zugehörigen Sechseckes $\langle\alpha\rangle_6$ ersetzt, gelangt man zu einem dem Polygone $P(0, 2m)$ benachbarten Polygone $P(0, 2m_1)$,

$$(m_1 = m - 1 \quad \text{oder} \quad m_1 = m - 2)$$

welches entweder, einem Falle 1) entsprechend, ein Normalpolygon, oder, einem Falle 2) entsprechend, einer analogen Reduktion fähig ist.

Man kann diese Überlegung an jedem neu resultierenden Polygone wiederholen, und wird daher nach genügend häufiger (höchstens $(m-3)$-maliger) Reduktion

1) entweder ein dem Polygone $P(0, 2m)$ benachbartes Normalpolygon $P(0, 2m_r)$ erhalten,

2) oder man wird zu einem Polygone $P(0, 2m_r)$ mit einem mindestens sechskantigen ebenen Zuge gelangen, d. h. es gilt der Satz:

Theorem 15. *Ein höchstens fünfkantige ebene Züge enthaltendes Kantenpolygon $P(c, 2m)$ der Charakteristik $c = 0$ ist dann und nur dann Elementarpolygon, wenn in einer Reihe von $\mu \leq m - 3$ ihm benachbarten Polygonen*

$$P(0, 2m_1), \quad P(0, 2m_2), \ldots, P(0, 2m_\mu),$$

in welcher jedes folgende zwei oder vier Kanten weniger als das vorhergehende zählt, das letzte Polygon ein Normalpolygon darstellt.

Auch die sich hieran knüpfende weitere Frage nach einer allgemeinen Methode, ein beliebiges Normalpolygon $P(0, 2n)$ auf eine Grundform $P_\varepsilon(0, 2n_1)$, $\varepsilon = 1, 3$, zu reducieren, ist leicht zu beantworten.

Es werde, die Vorstellungen zu fixieren, einem aus einer beliebigen Kante beginnenden Umlaufe des Normalpolygones $P(0, 2n)$ entsprechend das h^{te} Paar aufeinander folgender dreikantiger ebener Züge der Charakteristiken $+1$ und -1 durch $Z_{+1}^{(h)}$ und $Z_{-1}^{(h)}$, die zwischen diesen und den nächstfolgenden Zügen $Z_{-1}^{(h)}$ und $Z_{+1}^{(h+1)}$ verlaufenden a_h- und b_h-kantigen Züge durch Z_{a_h} und Z_{b_h} bezeichnet,

$$P(0, 2n) \equiv Z'_{+1} + \mathsf{Z}_{a_1} + Z'_{-1} + \mathsf{Z}_{b_1} + Z''_{+1} + \mathsf{Z}_{a_2} + Z''_{-1} + \mathsf{Z}_{b_2} + \cdots$$
$$\cdots + Z_{+1}^{(\nu)} + \mathsf{Z}_{a_\nu} + Z_{-1}^{(\nu)} + \mathsf{Z}_{b_\nu},$$
$$a_h, \; b_h = 0, 1, 3, 5, \cdots.$$

Alsdann denke man sich unter der allgemeineren Annahme $a_1 \gtrless 1$ an den Zug

$$Z'_{-1} + \mathsf{Z}_{b_1}$$

nach der negativen Seite hin einen aus $\frac{b_1 + 3}{2}$ einander paarweise seitenden Sechsecken $\langle \alpha \rangle_6$ bestehenden Streifen angesetzt und fasse das durch diesen von $P(0, 2n)$ getrennte Polygon $P'(0, 2n)$ auf. Dasselbe wird statt des Zuges

$$Z'_{+1} + Z_{a_1} + Z'_{-1} + Z_{b_1} + Z''_{+1} + Z_{a_2} + Z''_{-1}$$

den anderen enthalten

$$Z'_{+1} + Z_{a_1-2} + Z'_{-1} + Z_{b_1} + Z''_{+1} + Z_{a_2+2} + Z''_{-1}.$$

Man kann daher den vorbeschriebenen Übergang an diesem und jedem neu resultierenden Nachbarpolygone wiederholen, bis man nach $\frac{1+a_1}{2}$-maliger Wiederholung zu dem Polygone gelangt

$$\overline{P}(0, 2n) \equiv Z'_{+1} + Z'_{-1} + Z_{b_1} + Z''_{+1} + Z_{1+a_1+a_2} + Z''_{-1} + \cdots$$
$$\cdots + Z^{(\nu)}_{+1} + Z_{a_\nu} + Z^{(\nu)}_{-1} + Z_{b_\nu}.$$

Aus diesem Polygone kann man aber durch Ansetzung eines aus $2 + \frac{a_1 + a_2}{2}$ Sechsecken $\langle\alpha\rangle_6$ gebildeten Streifens an die positive Seite des Zuges

$$Z''_{+1} + Z_{1+a_1+a_2}$$

und durch $\frac{1+b_1}{2}$-malige Wiederholung dieser Operation zu einem Normalpolygone der Form übergehen

$$\overline{P}'(0, 2n) \equiv Z'_{+1} + Z'_{-1} + Z''_{+1} + Z_{1+a_1+a_2} + Z''_{-1} + Z_{1+b_1+b_2} + Z'''_{+1}$$
$$+ Z_{a_3} + \cdots + Z^{(\nu)}_{+1} + Z_{a_\nu} + Z^{(\nu)}_{-1} + Z_{b_\nu}.$$

Ersetzt man aber weiter den mittleren der drei Züge

$$Z'_{+1},\ Z'_{-1},\ Z''_1$$

durch den freien Rand eines an ihn grenzenden Sechseckes $\langle\alpha\rangle_6$, so resultiert ein Normalpolygon

$$\overline{\overline{P}}(0, 2n) \equiv Z''_{+1} + Z_{3+a_1+a_2} + Z''_1 + Z_{1+b_1+b_2} + Z'''_{+1} + Z_{a_3} + \cdots$$
$$\cdots + Z^{(\nu)}_{+1} + Z_{2a_\nu} + Z^{(\nu)}_{-1} + Z_{2+b_\nu},$$

welches bei gleicher Kantenzahl mit dem ursprünglichen Polygone nur noch $\nu - 1$ Paare aufeinander folgender dreikantiger ebener Züge der Charakteristiken $+1$ und -1 enthält. — Hieraus und aus dem Bildungsgesetz des Polygones $P(0, 2n)$ ergiebt sich aber der Satz:

15a. *Jedes Normalpolygon der Form*

$$P(0, 2n) \equiv Z'_{+1} + Z_{a_1} + Z'_{-1} + Z_{b_1} + \cdots$$
$$\cdots + Z_1^{(\nu)} + Z_{a_\nu} + Z_{-1}^{(\nu)} + Z_{b_\nu}$$

ist benachbart einem Polygone

$$P_3(0, 2n) \equiv Z_1^{(\nu)} + Z_a + Z_{-1}^{(\nu)} + Z_b,$$

$$a = 3(\nu - 1) + \sum_{h=1}^{\nu} a_h, \quad b = 3(\nu - 1) + \sum_{h=1}^{\nu} b_h.$$

Durch die bisherigen Ausführungen erfährt die Aufgabe, die etwaigen Elementarpolygone eines gegebenen allgemeinen Polyeders zu bestimmen, eine einfache und vollständige Erledigung.

So findet man für das Tetraeder $A_4 \equiv \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_3, \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_4\rangle_3$ drei Elementarpolygone des Typus $P_3(0, 8)$, nämlich die in § 16 angegebenen Normalpolygone:

$$|\alpha_k, \alpha_l|, \quad |\alpha_k, \alpha_i|, \quad |\alpha_i, \alpha_m|, \quad |\alpha_l, \alpha_i|, \quad |\alpha_l, \alpha_k|,$$
$$|\alpha_l, \alpha_m|, \quad |\alpha_m, \alpha_i|, \quad |\alpha_k, \alpha_m|.$$

Für das durch die Beziehungen

$$\langle\alpha_1\rangle_4 \rangle\!\!\frac{}{4}\!\!\langle \langle\alpha_4\rangle_4, \quad \langle\alpha_2\rangle_4 \rangle\!\!\frac{}{4}\!\!\langle \langle\alpha_5\rangle_4, \quad \langle\alpha_3\rangle_4 \rangle\!\!\frac{}{4}\!\!\langle \langle\alpha_6\rangle_4$$

bestimmte Tetragonhexaeder ergeben sich:

1) Vier Elementarpolygone des Typus $P_1(0, 6)$, nämlich

$$|\alpha_i, \alpha_{l'}|, \quad |\alpha_{l'}, \alpha_k|, \quad |\alpha_k, \alpha_{i'}|, \quad |\alpha_{i'}, \alpha_l|, \quad |\alpha_l, \alpha_{k'}|, \quad |\alpha_{k'}, \alpha_i|;$$

2) sechs Elementarpolygone des Typus $P_3(0, 8)$, nämlich

$$|\alpha_i, \alpha_l|, \quad |\alpha_k, \alpha_l|, \quad |\alpha_k, \alpha_{i'}|, \quad |\alpha_k, \alpha_{l'}|, \quad |\alpha_i, \alpha_{l'}|, \quad |\alpha_{k'}, \alpha_{l'}|,$$
$$|\alpha_{k'}, \alpha_{i'}|, \quad |\alpha_{k'}, \alpha_l|,$$

wo allgemein durch $\langle\alpha_x\rangle_4$, $\langle\alpha_{x'}\rangle_4$ zwei Gegenflächen bezeichnet sind.

Um die Elementarpolygone eines Pentagondodekaeders zu ermitteln, werde dasselbe definiert durch die Bestimmungen:

$$\langle\alpha_1\rangle_5 \,|: \langle\alpha_2\rangle_5, \ \langle\alpha_3\rangle_5, \ \langle\alpha_4\rangle_5, \ \langle\alpha_5\rangle_5, \ \langle\alpha_6\rangle_5;$$
$$\langle\alpha_7\rangle_5 \,|: \langle\alpha_8\rangle_5, \ \langle\alpha_9\rangle_5, \ \langle\alpha_{10}\rangle_5, \ \langle\alpha_{11}\rangle_5, \ \langle\alpha_{12}\rangle_5,$$
$$\langle\alpha_1\rangle_5 \rangle\!\!\frac{}{1}\!\!\langle : \langle\alpha_8\rangle_5, \ \langle\alpha_9\rangle_5, \ \langle\alpha_{10}\rangle_5, \ \langle\alpha_{11}\rangle_5, \ \langle\alpha_{12}\rangle_5;$$
$$\langle\alpha_7\rangle_5 \rangle\!\!\frac{}{1}\!\!\langle : \langle\alpha_2\rangle_5, \ \langle\alpha_3\rangle_5, \ \langle\alpha_4\rangle_5, \ \langle\alpha_5\rangle_5, \ \langle\alpha_6\rangle_5,$$

wo zwischen den Indices x, x' zweier Gegenflächen die Beziehung statthat,

$$x - x' = \pm 6,$$

und wo die Flächenfolge

$$\langle\alpha_2\rangle_5, \langle\alpha_3\rangle_5, \langle\alpha_4\rangle_5, \langle\alpha_5\rangle_5, \langle\alpha_6\rangle_5$$

einem in positivem Sinne ausgeführten Umlauf von $\langle\alpha_1\rangle_5$ entspricht.

Ein beliebiges Kantenpolygon P wird die Oberfläche dieses 12-flachs A_{12} in zwei Bestandteile S_1, S_2 scheiden, von denen der erste $m_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, der zweite $m_2 = 11, 10, 9, 8, 7, 6$ Grenzflächen $\langle\alpha\rangle_5$ enthalten kann.

Die Polygone der ersten Art sind mit den zwölf Polygonen $\langle\alpha\rangle_5$ identisch. Sie sind daher sämtlich isomorph, und ihre gemeinsame Charakteristik ist $+5$.

Die Polygone der zweiten Art sind durch die den Kanten $|\alpha_i, \alpha_k|$ des 12-flachs entsprechenden 30 Paare von Seitenflächen $\langle\alpha_i\rangle_5$, $\langle\alpha_k\rangle_5$ gegeben. Auch sie sind untereinander isomorph, und ihre gemeinsame Charakteristik ist $+4$.

Die Polygone der dritten Art sind bestimmt:

a) durch 20 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle;$$

b) durch $5 \cdot 12$ Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle.$$

Ihre Charakteristiken sind resp.:

a) $\qquad C(P(S_1)) = +1 + 1 + 1 = 3;$

b) $\qquad C(P(S_1)) = +2 - 1 + 2 = 3.$

Die Polygone der vierten Art sind bestimmt

a) durch $\frac{5 \cdot 12}{2}$ Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_4\rangle;$$

b) durch $5 \cdot 12$ Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_5\rangle;$$

c) durch $2 \cdot 30$ Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle;$$

d) durch 2 . 30 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle.$$

Ihre Charakteristiken sind resp.:

a) $C(P(S_1)) = +1 + 1 = 2,$

b) $C(P(S_1)) = +2 - 1 + 1 + 1 - 1 = 2,$

c) $C(P(S_1)) = +2 - 2 + 2 = 2,$

d) $C(P(S_1)) = +2 - 1 + 2 - 1 = 2.$

Die Polygone der fünften Art sind bestimmt:

a) durch 5 . 12 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_5\rangle,$$

b) durch 2 . 30 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle;$$

c) durch 2 . 5 . 12 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_8\rangle,$$

d) durch 3 . 20 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle,$$

e) durch 5 . 12 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_8\rangle,$$

f) durch 2 . 5 . 12 Flächen der Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle.$$

Denselben entsprechen die Charakteristiken:

a) $C(P(S_1)) = +1 - 1 + 1 = 1;$

b) $C(P(S_1)) = -1 + 2 - 1 + 1 = 1;$

c) $C(P(S_1)) = +2 - 1 + 1 + 1 - 2 = 1;$

d) $C(P(S_1)) = -2 + 2 - 1 + 1 - 1 + 2 = 1;$

e) $C(P(S_1)) = +2 - 1 - 1 + 2 - 1 = 1;$

f) $C(P(S_1)) = +2 - 1 + 2 - 2 = 1.$

Da hiernach eine Fläche, welche sich aus $m_1 \leqq 5$ bezw. aus $12 - m_1 \geqq 7$ Grenzflächen $\langle\alpha\rangle$ zusammensetzt, von einem Polygone der Charakteristik $6 - m_1$ berandet wird, müssen alle etwaigen Elementarpolygone des 12-flachs unter denjenigen Kantenpolygonen enthalten sein, welche seine Ober-

fläche in zwei je sechs Grenzflächen $\langle\alpha\rangle$ umfassende Bestandteile S_1, S_2 trennen.

Nun findet man die letztbezeichneten, das 12-flach A_{12} in gewissem Sinne hälftenden Polygone in systematischer Folge durch nachstehende Überlegung.

Offenbar mufs der Bestandteil S_1 als einfach berandete Fläche aufser einer Fläche $\langle\alpha_1\rangle$ noch mindestens eine Seitenfläche $\langle\alpha_2\rangle$ derselben enthalten. Im übrigen wird er entweder kein, oder ein, oder zwei, oder drei Paare von Gegenflächen aufweisen.

I. Bestandteile S_1 *ohne* Gegenflächen.

1) Besitzt S_1 nur die eine Seitenfläche $\langle\alpha_2\rangle$ von $\langle\alpha_1\rangle$, so ist

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_9\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle.$$

Es besteht dann S_1 aus den drei in einer Ecke zusammenstofsenden Flächen $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_{10}\rangle$, $\langle\alpha_{11}\rangle$ und denjenigen drei Flächen $\langle\alpha_1\rangle$, $\langle\alpha_9\rangle$, $\langle\alpha_{12}\rangle$, welche resp. durch deren der Ecke gegenüberliegende Seiten gehen. — Das zu S_1 gehörige Randpolygon

$$\begin{aligned} P \equiv\ & |\alpha_2, \alpha_3|, |\alpha_1, \alpha_3|, |\alpha_1, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_5|, |\alpha_1, \alpha_6|, \\ & |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_{10}, \alpha_6|, |\alpha_9, \alpha_6|, |\alpha_9, \alpha_5|, |\alpha_9, \alpha_8|, \\ & |\alpha_9, \alpha_7|, |\alpha_{10}, \alpha_7|, |\alpha_{11}, \alpha_7|, |\alpha_{12}, \alpha_7|, |\alpha_{12}, \alpha_8|, \\ & |\alpha_{12}, \alpha_4|, |\alpha_{12}, \alpha_3|, |\alpha_{11}, \alpha_3| \end{aligned}$$

hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = +2 - 2 + 2 - 2 + 2 - 2 = 0.$$

Dasselbe ist einem Elementarpolygone der Grundform $P_1(0, 12)$ benachbart, zu dem man gelangt, wenn man an P drei Sechsecke $\langle\alpha_3\rangle_6$*), $\langle\alpha_7\rangle_6$, $\langle\alpha_6\rangle_6$ ansetzt. — Im Ganzen existieren auf A_{12} zehn solche Elementarpolygone.

2) Enthält S_1 aufser $\langle\alpha_2\rangle$ noch eine zweite Seitenfläche von $\langle\alpha_1\rangle$, so sind zwei Fälle zu unterscheiden.

*) Diese Ausdrucksweise soll besagen, dafs das anzusetzende Sechseck $\langle\alpha_i\rangle_6$ mit P denselben Kantenzug wie das gleichnamige Fünfeck $\langle\alpha_i\rangle_5$ gemein hat.

a) Unter der Annahme, dafs diese Fläche auch Seitenfläche von $\langle\alpha_2\rangle$ ist, bestimmt sich

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle.$$

Es besteht also S_1 aus den drei in einer Ecke zusammenstofsenden Flächen $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_3\rangle$, $\langle\alpha_{11}\rangle$ und deren nach den Kanten der Ecke genommenen drei Scheitelflächen $\langle\alpha_{12}\rangle$, $\langle\alpha_{10}\rangle$, $\langle\alpha_1\rangle$. — Das zugehörige Randpolygon

$$P \equiv |\alpha_{10}, \alpha_7|, |\alpha_{11}, \alpha_7|, |\alpha_{12}, \alpha_7|, |\alpha_{12}, \alpha_8|, |\alpha_{12}, \alpha_4|,$$
$$|\alpha_3, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_5|, |\alpha_1, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_6|,$$
$$|\alpha_{10}, \alpha_6|, |\alpha_{10}, \alpha_9|$$

hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0.$$

Es ist einem Elementarpolygone der Grundform $P_3(0, 12)$ benachbart, das man erhält, indem man an P die Sechsecke $\langle\alpha_4\rangle_6$, $\langle\alpha_6\rangle_6$ ansetzt. — Im Ganzen besitzt das 12-flach zehn solche Elementarpolygone.

b) In dem Falle, dafs die $\langle\alpha_1\rangle$ seitende Fläche nicht auch Seitenfläche von $\langle\alpha_2\rangle$, also etwa mit $\langle\alpha_4\rangle$ identisch ist, hat man

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_9\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle.$$

Da hier S_1 keine einfach zusammenhängende Fläche darstellt, vielmehr aus zwei getrennten Stücken besteht, ist dieser Fall belanglos.

3) Enthält S_1 drei Seitenflächen von $\langle\alpha_1\rangle$, so sind dieselben

a) entweder drei aufeinander folgende Flächen, wie $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_3\rangle$, $\langle\alpha_4\rangle$,

b) oder drei nicht aufeinander folgende Flächen, wie $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_3\rangle$, $\langle\alpha_5\rangle$.

Im ersten Falle ist

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle.$$

Es besteht dann S_1 aus einer Fläche $\langle\alpha_3\rangle$ und deren fünf Seitenflächen. Das zugehörige Randpolygon

$$P \equiv |\alpha_1, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_8|, |\alpha_{12}, \alpha_8|, |\alpha_{12}, \alpha_7|,$$
$$|\alpha_{11}, \alpha_7|, |\alpha_{11}, \alpha_{10}|, |\alpha_2, \alpha_{10}|, |\alpha_2, \alpha_6| \; |\alpha_1, \alpha_6|$$

ist ein Elementarpolygon der Grundform $P_1(0, 10)$. — Im Ganzen sind sechs solche Elementarpolygone auf A_{12} vorhanden.

Dem zweiten Falle entsprechend ergiebt sich

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle$$

als eine Fläche, welche mit der unter I, 1 erhaltenen übereinstimmt.

4) Enthält S_1 vier Seitenflächen von $\langle\alpha_1\rangle$, so resultiert die Flächenform

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_5\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle,$$

ein Fall, der bereits unter I, 2 behandelt worden.

5) Ebenso ist die Annahme, dafs zu S_1 alle fünf Seitenflächen von $\langle\alpha_1\rangle$ gehören, schon durch I, 3a erledigt.

II. Bestandteile mit *einem* Paar Gegenflächen $\langle\alpha_1\rangle$, $\langle\alpha_7\rangle$.

1) Enthält S_1 aufser $\langle\alpha_2\rangle$ noch eine zweite Seitenfläche von $\langle\alpha_1\rangle$, so kann dieselbe entweder, wie $\langle\alpha_3\rangle$, auch $\langle\alpha_2\rangle$ seiten, oder, wie $\langle\alpha_4\rangle$, von $\langle\alpha_2\rangle$ getrennt liegen.

Im ersten Falle hat man abermals zwei Möglichkeiten in der Zusammensetzungsart von S_1, nämlich:

a) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle,$

b) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_{10}\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle.$

Unter a) hat das Randpolygon

$$P \equiv |\alpha_3, \alpha_{12}|, |\alpha_3, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_5|, |\alpha_1, \alpha_6|, \\ |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_{10}, \alpha_6|, |\alpha_{10}, \alpha_9|, |\alpha_7, \alpha_9|, |\alpha_7, \alpha_8|, \\ |\alpha_7, \alpha_{12}|, |\alpha_{11}, \alpha_{12}|$$

die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = +1 - 1 + 1 - 1 = 0.$$

Dasselbe ist einem Elementarpolygone der Grundform $P_3(0, 12)$ benachbart, welches von ihm durch die beiden Sechsecke $\langle\alpha_{12}\rangle_6$, $\langle\alpha_4\rangle_6$ getrennt ist. — Im Ganzen giebt es auf A_{12} 30 solche Elementarpolygone P.

Unter b) stellt S_1 eine zweifach berandete Fläche dar, kommt also nicht weiter in Betracht.

Sieht man im zweiten Falle von einer der letzten analogen Zusammensetzungsart der Fläche S_1 ab, so bestimmt sich

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_9\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle.$$

Das hierzu gehörige Randpolygon

$$\begin{aligned} P \equiv & |\alpha_{11}, \alpha_3|, |\alpha_2, \alpha_3|, |\alpha_1, \alpha_3|, |\alpha_4, \alpha_3|, |\alpha_4, \alpha_{12}|, \\ & |\alpha_4, \alpha_8|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_1, \alpha_5|, |\alpha_1, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_6|, \\ & |\alpha_2, \alpha_{10}|, |\alpha_{11}, \alpha_{10}|, |\alpha_7, \alpha_{10}|, |\alpha_9, \alpha_{10}|, |\alpha_9, \alpha_6|, \\ & |\alpha_9, \alpha_5|, |\alpha_9, \alpha_8|, |\alpha_7, \alpha_8|, |\alpha_7, \alpha_{12}|, |\alpha_{11}, \alpha_{12}| \end{aligned}$$

hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = -2 + 2 - 2 + 2 = 0.$$

Dasselbe ist einem Normalpolygone der Grundform $P_3(0, 16)$ benachbart. Man findet letzteres dadurch, dafs man an P zuerst die Sechsecke $\langle\alpha_3\rangle_6$, $\langle\alpha_{10}\rangle_6$, dann die Fläche $\langle\alpha_{12}\rangle_6$ und schliefslich an den durch die Flächen $\langle\alpha_3\rangle_6$, $\langle\alpha_{12}\rangle_6$, $\langle\alpha_7\rangle_6$ bestimmten Kantenzug drei weitere Sechsecke ansetzt. — Die Anzahl dieser Elementarpolygone P von A_{12} ist 30.

3) Enthält S_1 drei Seitenflächen von $\langle\alpha_1\rangle$, so sind dieselben

a) entweder aufeinander folgende Flächen, wie $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_3\rangle$, $\langle\alpha_4\rangle$,

b) oder nicht aufeinander folgende Flächen, wie $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_3\rangle$, $\langle\alpha_5\rangle$.

Im ersten Falle fällt S_1 unter die Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_3\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle, \langle\alpha_7\rangle.$$

Das zugehörige Randpolygon

$$\begin{aligned} P \equiv & |\alpha_1, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_{10}|, |\alpha_{11}, \alpha_{10}|, |\alpha_7, \alpha_{10}|, \\ & |\alpha_7, \alpha_9|, |\alpha_7, \alpha_8|, |\alpha_7, \alpha_{12}|, |\alpha_{11}, \alpha_{12}|, |\alpha_3, \alpha_{12}|, \\ & |\alpha_4, \alpha_{12}|, |\alpha_4, \alpha_8|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_1, \alpha_5| \end{aligned}$$

hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0.$$

Es ist einem Elementarpolygone der Grundform $P_3(0, 12)$ benachbart, welches hervorgeht, wenn man an P das Sechseck $\langle\alpha_{12}\rangle_6$ ansetzt. — Im Ganzen besitzt A_{12} 2 . 5 . 6 solche Elementarpolygone P.

Im zweiten Falle hat S_1 die Form

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_5\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_{10}\rangle.$$

Das zugehörige Randpolygon

$$\begin{aligned} P \equiv\ & |\alpha_{10}, \alpha_9|,\ |\alpha_7, \alpha_9|,\ |\alpha_7, \alpha_8|,\ |\alpha_7, \alpha_{12}|,\ |\alpha_7, \alpha_{11}|, \\ & |\alpha_{10}, \alpha_{11}|,\ |\alpha_2, \alpha_{11}|,\ |\alpha_3, \alpha_{11}|,\ |\alpha_3, \alpha_{12}|,\ |\alpha_3, \alpha_4|, \\ & |\alpha_1, \alpha_4|,\ |\alpha_5, \alpha_4|,\ |\alpha_5, \alpha_8|,\ |\alpha_5, \alpha_9|,\ |\alpha_5, \alpha_6|, \\ & |\alpha_1, \alpha_6|,\ |\alpha_2, \alpha_6|,\ |\alpha_{10}, \alpha_6| \end{aligned}$$

hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = +2 - 2 + 1 - 1 + 2 - 2 = 0.$$

Es ist einem Normalpolygone der Grundform $P_3(0, 14)$ benachbart, zu dem man durch die Ansetzung der Sechsecke $\langle\alpha_{11}\rangle_6$, $\langle\alpha_6\rangle_6$ gelangt. — Im Ganzen kommen auf A_{12} $2 \,.\, 5 \,.\, 6$ solche Elementarpolygone P vor.

4) Der Fall, dafs S_1 vier Seitenflächen von $\langle\alpha_1\rangle$ enthält, ist bedeutungslos, da alsdann S_1 aus zwei getrennten Teilen besteht.

III. Bestandteile S_1 mit zwei Paaren Gegenflächen $\langle\alpha_1\rangle$, $\langle\alpha_7\rangle$ und $\langle\alpha_2\rangle$, $\langle\alpha_8\rangle$.

1) Enthält S_1 aufser $\langle\alpha_2\rangle$ noch eine zweite Seitenfläche von $\langle\alpha_1\rangle$, so kann dieselbe zu $\langle\alpha\rangle_2$

a) entweder, wie die Fläche $\langle\alpha_3\rangle$, benachbart,

b) oder, wie die Fläche $\langle\alpha_4\rangle$, getrennt liegen.

Unter der Annahme a) hat man für die Zusammensetzungsweise von S_1 drei Möglichkeiten, nämlich:

a_a) $\quad S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,\ \langle\alpha_{10}\rangle,$

a_b) $\quad S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,\ \langle\alpha_{11}\rangle,$

a_c) $\quad S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,\ \langle\alpha_{12}\rangle.$

a_a) Das Randpolygon der Fläche S_1

$$\begin{aligned} P \equiv\ & |\alpha_1, \alpha_6|,\ |\alpha_2, \alpha_6|,\ |\alpha_{10}, \alpha_6|,\ |\alpha_{10}, \alpha_9|,\ |\alpha_7, \alpha_9|, \\ & |\alpha_8, \alpha_9|,\ |\alpha_8, \alpha_5|,\ |\alpha_8, \alpha_4|,\ |\alpha_8, \alpha_{12}|,\ |\alpha_7, \alpha_{12}|, \\ & |\alpha_7, \alpha_{11}|,\ |\alpha_{10}, \alpha_{11}|,\ |\alpha_2, \alpha_{11}|,\ |\alpha_3, \alpha_{11}|,\ |\alpha_3, \alpha_{12}|, \\ & |\alpha_3, \alpha_4|,\ |\alpha_1, \alpha_4|,\ |\alpha_1, \alpha_5| \end{aligned}$$

hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = -1 - 1 + 2 - 2 + 1 + 1 = 0.$$

Demselben ist ein Elementarpolygon der Grundform $P_3(0,14)$ benachbart, das entsteht, wenn man an P drei Sechsecke $\langle\alpha_6\rangle_6$, $\langle\alpha_9\rangle_6$, $\langle\alpha_{11}\rangle_6$ ansetzt. — Im Ganzen sind auf A_{12} 2.5.6 Elementarpolygone des Typus P vorhanden.

a_b) Die Fläche S_1 hat das Randpolygon

$$\begin{aligned}P \equiv\ & |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_{10}|, |\alpha_{11}, \alpha_{10}|, |\alpha_7, \alpha_{10}|, |\alpha_7, \alpha_9|,\\ & |\alpha_8, \alpha_9|, |\alpha_8, \alpha_5|, |\alpha_8, \alpha_4|, |\alpha_8, \alpha_{12}|, |\alpha_7, \alpha_{12}|,\\ & |\alpha_{11}, \alpha_{12}|, |\alpha_3, \alpha_{12}|, |\alpha_3, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_5|,\\ & |\alpha_1, \alpha_6|,\end{aligned}$$

und dieses hat die Charakteristik

$$C(P(S_1)) = -1 + 2 - 2 + 1 = 0.$$

Setzt man an P zuerst ein Sechseck $\langle\alpha_{12}\rangle_6$, dann ein Sechseck $\langle\alpha_4\rangle_6$, schliefslich nach derselben Seite an die drei aufeinanderfolgenden freien Kanten der Flächen $\langle\alpha_8\rangle$, $\langle\alpha_{12}\rangle$, $\langle\alpha_4\rangle$ ein drittes Sechseck an, so erhält man ein P benachbartes Elementarpolygon der Grundform $P_3(0,14)$. — Es giebt auf A_{12} im Ganzen 2.5.6 solche Elementarpolygone P.

a_c) Man findet das Randpolygon

$$\begin{aligned}P \equiv\ & |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_{10}|, |\alpha_2, \alpha_{11}|, |\alpha_3, \alpha_{11}|, |\alpha_{12}, \alpha_{11}|,\\ & |\alpha_7, \alpha_{11}|, |\alpha_7, \alpha_{10}|, |\alpha_7, \alpha_9|, |\alpha_8, \alpha_9|, |\alpha_8, \alpha_5|,\\ & |\alpha_8, \alpha_4|, |\alpha_{12}, \alpha_4|, |\alpha_3, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_4|, |\alpha_1, \alpha_5|,\\ & |\alpha_1, \alpha_6|\end{aligned}$$

mit der Charakteristik

$$C(P(S_1)) = +1 - 2 + 1 + 1 - 2 + 1 = 0.$$

Dasselbe ist einem Elementarpolygone der Grundform $P_1(0,12)$ benachbart, und zwar geht letzteres aus P durch die Ansetzung zweier Sechsecke $\langle\alpha_{11}\rangle_6$, $\langle\alpha_4\rangle_6$ hervor. — Die Anzahl dieser Elementarpolygone P von A_{12} beträgt 30.

Unter der Annahme b) ergeben sich die drei möglichen Flächenformen:

b_a) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_8\rangle, \langle\alpha_9\rangle,$

b_b) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_8\rangle, \langle\alpha_{11}\rangle,$

b_c) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle, \langle\alpha_2\rangle, \langle\alpha_4\rangle, \langle\alpha_7\rangle, \langle\alpha_8\rangle, \langle\alpha_{12}\rangle,$

von denen b_a und b_c mit resp. a_a und a_b übereinstimmen, während b_b eine doppelt berandete Fläche darstellt.

2) Besitzt S_1 aufser $\langle\alpha_2\rangle$ noch zwei Seitenflächen von $\langle\alpha_1\rangle$, so kommen, da durch

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_6\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle$$

eine zweiteilige Fläche dargestellt wird, nur die Flächentypen in Betracht,

a) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_4\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,$

b) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_5\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,$

c) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_4\rangle,\ \langle\alpha_5\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle.$

Hiervon stimmen aber die Formen (a) und (b) offenbar mit resp. den früheren Formen (a_b) und (a_a) überein, und wenn man im Falle (c) statt der Fläche S_1 den anderen Teil S_1' der Oberfläche von A_{12} auffafst,

$$S_1' \equiv \langle\alpha_9\rangle,\ \langle\alpha_{10}\rangle,\ \langle\alpha_{11}\rangle,\ \langle\alpha_{12}\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_6\rangle,$$

erkennt man auch diesen als schon im Falle (a_c) enthalten.

IV. Soll der Bestandteil S_1 drei Paar Gegenflächen enthalten, so mufs er unter eine der beiden Formen fallen:

1) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_3\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,\ \langle\alpha_9\rangle,$

2) $S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \langle\alpha_4\rangle,\ \langle\alpha_7\rangle,\ \langle\alpha_8\rangle,\ \langle\alpha_{10}\rangle.$

Im ersten Falle wird aber S_1 durch eine zweiteilige, im zweiten durch eine doppelt berandete Fläche dargestellt.

Alles zusammenfassend kann man nunmehr das Resultat aussprechen:

Die Elementarpolygone eines Pentagondodekaeders werden durch diejenigen Kantenpolygone bestimmt, welche seine Oberfläche in zwei je sechs Grenzsechsecke enthaltende Stücke spalten. Sie verteilen sich auf neun allomorphe Typen mit zusammen 296 Vertretern.

Der Beweis des ersten Teiles dieses Satzes kann mittelst eines in § 21 gegebenen allgemeineren Theoremes wesentlich vereinfacht werden.

§ 20. Der erweiterte Charakteristikenbegriff.

Die noch auszuführende Untersuchung der Elementarnetze macht es erforderlich, auch solche Kantenpolygone P in den Kreis der Betrachtung zu ziehen, welche mehr als fünfkantige ebene Züge enthalten, und demgemäfs den Begriff der Charakteristik auf diese Polygone auszudehnen.

Wenn auf der Oberfläche S eines Polyeders A_n als Berandung eines Bestandteiles S_0 ein Polygon P_0 gegeben ist, welches mit a_h Randflächen von S_0 und mit b_h Randflächen des Supplementes $S - S_0$ je h aufeinander folgende Kanten gemein hat, so wird die auf S_0 bezogene Charakteristik des Polygones P_0 bestimmt durch die Gleichung:

$$C(P_0) = (a_3 + 2a_4 + 3a_5 + 4a_6 + \cdots) - (b_3 + 2b_4 + 3b_5 + 4b_6 + \cdots).$$

Da das positive Glied der rechten Seite die Randkanten der vorgeschobenen, das negative Glied die der zurücktretenden Randflächen von S_0 zählt, kann die Charakteristik $C(P(S_0))$ auch durch *den Überschufs der Anzahl der Kanten erster Art über die Zahl der zweiter Art* definiert werden.

In diesem Sinne ergiebt sich die Charakteristik eines m-seitigen ebenen Polygones gleich $\pm m$, je nachdem dessen Fläche als eingeschlossen oder als ausgeschlossen angesehen wird.

Wie schon § 13 bemerkt worden, bestimmt jedes Polygon $P(c, m)$ unzweideutig ein sogenanntes reduciertes Polygon $P(0, 2\mu)$, welches entsteht, wenn man in jedem drei- oder mehrkantigen ebenen Zuge von $P(c, m)$ die zwischen der ersten und letzten gelegenen Kanten wegläfst, jene beiden aber bis zu ihrem gemeinsamen Durchschnitt verlängert,

$$P(0, 2\mu) \equiv k_1, k_2, \ldots, k_{2\mu-1}, k_{2\mu}.$$

Das Polygon $P(c, m)$ erscheint dann naturgemäfs durch folgende charakteristische Merkmale definiert:

1) durch die Anzahl 2μ der Kanten des reducierten Polygones,

$$2\mu = 2\left[\frac{m}{2}\right], \quad 2\left[\frac{m}{2}\right] - 2, \ldots, 6, 4;$$

2) durch den Überschufs c der Anzahl b_1 aller Kanten der Ebenen

$$[k_1, k_2], [k_3, k_4], \ldots, [k_{2\mu-1}, k_{2\mu}]$$

über die Anzahl a_1 aller Kanten der Ebenen

$$[k_2, k_3], [k_4, k_5], \ldots, [k_{2\mu}, k_1],$$

$$c = m - 2\mu, \; m - 2\mu - 1, \ldots, 1, 0;$$

3) durch Anzahl und Formen der aus den Kanten eines jeden Systemes gebildeten Züge,

$$b_1 = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \cdots, \quad a_1 = b_3 + 2b_4 + 3b_5 + \cdots;$$

4) durch die Art der Verteilung der einzelnen Züge auf die Flächen beider Systeme. Gemäfs dieser Auffassung ergeben sich, wenn die Anzahl derjenigen m-kantigen Polygone, welche die Charakteristik c haben, mit $\varphi(m, c)$, die aller aber mit $\varphi(m)$ bezeichnet wird, in den einfachsten Fällen die Anzahlen:

1. $\varphi(4) = \varphi(4, 0) = 1$; 2. $\varphi(5) = \varphi(5, 1) = 1$;
3. $\varphi(6) = \varphi(6, 0) + \varphi(6, 2) = 2 + 2 = 4$;
4. $\varphi(7) = \varphi(7, 1) + \varphi(7, 3) = 3 + 2 = 5$;
5. $\varphi(8) = \varphi(8, 0) + \varphi(8, 2) + \varphi(8, 4) = 6 + 4 + 3 = 13$;
6. $\varphi(9) = \varphi(9, 1) + \varphi(9, 3) + \varphi(9, 5) = 9 + 6 + 3 = 18$.

Überhaupt gilt zufolge der Gleichungen

$$a_1 + b_1 + 2\mu = m \quad \text{und} \quad b_1 - a_1 = c:$$

Polygone mit gerader bezw. ungerader Kantenzahl haben stets eine gerade bezw. ungerade Charakteristik, und umgekehrt.

Mit der obigen Definition erweitert sich das wichtige Theorem 11 des § 18 zu dem Satze:

Theorem 16. *Wenn zwei beliebige vollkommen getrennt oder teilweise zusammenfallend verlaufende Polygone P und Q einen nur Sechsecke enthaltenden Gürtel $G\langle 6\rangle$ oder einen bezw. mehrere entsprechende Streifen begrenzen, so zwar, dafs sie auch in den letzteren Fällen rücksichtlich der eingeschlossenen Sechsecke als mittelbar benachbart erscheinen, dann können ihre Charakteristiken $C(P)$ und $C(Q)$ sich nur in den Vorzeichen unterscheiden.*

Der Beweis dieses Satzes ist demjenigen des Theoremes 11

durchaus analog und kann deshalb als bereits gegeben angesehen werden.

Wie für ein beliebiges Kantenpolygon P, so wird auch für jeden Zug Z eines solchen der Begriff der Charakteristik eingeführt:

$$C(Z) = (a_3' + 2a_4' + 3a_5' + 4a_6' + \cdots) \\ - (b_3' + 2b_4' + 3b_5' + 4b_6' + \cdots).$$

Endlich soll in jedem zweiendigen Zuge Z einer als Teilpunkt $\mathfrak{t}_0$ aufgefafsten Ecke der Punktcharakter zukommen:

$$C(\mathfrak{t}_0) = C(Z) - C(Z_1) - C(Z_2),$$

mit Z_1 und Z_2 die durch $\mathfrak{t}_0$ bestimmten zwei Teile von Z bezeichnet.

Wenn dann auf einem geschlossenen Polygone P irgend m Ecken

$$\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_{m-1}, \mathfrak{t}_m$$

nach einander als Teilpunkte eingeführt werden, *so hat die Summe ihrer durch die Reihenfolge mitbestimmten Charakteristiken*

$$C(\mathfrak{t}_1) + C(\mathfrak{t}_2) + \cdots + C(\mathfrak{t}_{m-1}) + C(\mathfrak{t}_m)$$

einen von der angesetzten Folge unabhängigen Wert, nämlich:

$$C(P) - C(Z_1) - C(Z_2) - \cdots - C(Z_m),$$

wo allgemein ein Zug Z_i durch zwei bei einem Umlauf um P aufeinander folgende Teilpunkte $\mathfrak{t}_k$ und $\mathfrak{t}_l$ begrenzt wird.

Es gelten nämlich, da die Charakteristiken der ersten $m-1$ Teilpunkte von der Wahl des m^{ten} unabhängig sind, unter der Annahme, dafs die behauptete Relation für weniger als m Teilpunkte bewiesen sei, die Beziehungen:

1) $C(\mathfrak{t}_1) + C(\mathfrak{t}_2) + \cdots + C(\mathfrak{t}_{m-1}) + C(Z_1) + C(Z_2) + \cdots + C(Z'_{m-1}) = C(P)$,

2) $C(\mathfrak{t}_m) = C(Z'_{m-1}) - C(Z_{m-1}) - C(Z_m)$,

wo die Ecke $\mathfrak{t}_m$ den von $\mathfrak{t}_{m-1}$ und $\mathfrak{t}_1$ begrenzten Zug Z'_{m-1} in die Züge Z_{m-1} und Z_m teilt.

Die Addition der beiden Gleichungen ergieht aber:

$$\text{3)} \qquad \sum_{i=1}^{m} C(\mathfrak{t}_i) + \sum_{i=1}^{m} C(Z_i) = C(P).$$

Die aufgestellte Behauptung gilt also ganz allgemein, wenn sie sich für ein Polygon mit einer Teilecke bestätigt.

Indem man aber die Charakteristik eines solchen Polygones durch die Charakteristiken seiner ebenen Kantenzüge ausdrückt und zugleich berücksichtigt, dafs eine Ecke t_1 stets nur *einen* dieser Züge teilt, kann man in der betreffenden Darstellung

$$C(P) = C(Z_1) + C(Z_2) + \cdots + C(Z_r)$$

die Charakteristik des von t_1 geteilten ebenen Zuges Z_1 ersetzen durch

$$C(t_1) + C(Z_1') + C(Z_1''),$$

und findet so die zu erhärtende Gleichung

$$C(t_1) + C(Z) = C(P),$$

unter Z den aus P durch die Teilecke t_1 erzeugten zweiendigen Zug verstanden.

§ 21. Allgemeine und elementare Netze.

Um die allgemeinsten Elementarerweiterungen eines gegebenen Polyeders A_n zu studieren, denke man sich auf dessen Oberfläche S irgend ein Elementarnetz gezogen:

$$N_m \equiv R_1, R_2, \ldots, R_{m-1}, R_m,$$

in welchem jedes Polygon bezw. jedes Polygonensystem R_i die vollständige Berandung eines einteiligen Flächenstückes S_i bildet. Da, falls R_i aus ϱ_i getrennten Polygonen $P_i^{(h)}$ bestände, auch ϱ_i von einander unabhängige Elementarerweiterungen auszuführen wären, kann man die Untersuchung auf den Fall einteiliger Polygone R_i beschränken. Es begrenzt dann jedes Polygon $R_i \equiv P_i$ vollständig einen Flächenteil S_i und aufserdem stückweise zwei oder mehrere Bestandteile S_k. Jeder zwei Flächen S_i, S_k gemeinsame Kantenzug soll kurz eine Kante, jede drei Flächen S_i, S_k, S_l gemeinsame Ecke aber eine Ecke des Netzes heifsen.

Zwischen den Anzahlen m, m_1 und m_2 der Flächen, Kanten und Ecken eines so definierten Netzes besteht die *Euler*'sche Relation:

$$m - m_1 + m_2 = 2.$$

Denn da mit einer Kante (S_{m-1}, S_m) zugleich auch zwei Ecken (S_{m-2}, S_{m-1}, S_m) und (S_{m-3}, S_{m-1}, S_m) ausscheiden, und folglich nicht nur die beiden Flächen S_{m-1}, S_m sich zu einer Fläche S'_{m-1}, sondern auch die beiden Kantenpaare (S_{m-2}, S_{m-1}), (S_{m-2}, S_m) und (S_{m-3}, S_{m-1}), (S_{m-3}, S_m) sich zu zwei Kanten (S_{m-2}, S'_{m-1}) und (S_{m-3}, S'_{m-1}) vereinigen, so ist die aufgestellte Relation allgemein gültig, wenn sie für ein dreiteiliges Netz besteht. Für ein solches ist aber:

$$m = 3, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = 2$$

und also

$$m - m_1 + m_2 = 2.$$

Aufser der *Euler*'schen gilt noch die zweite Relation:

$$2m_1 = 3m_2.$$

Aus beiden berechnet sich:

$$m_1 = 3m - 6 \quad \text{und} \quad m_2 = 2m - 4.$$

Unterscheidet man die einzelnen gemeinsamen Kantenzüge zweier Polygone P_i, P_k durch die Bezeichnungen

$$P'_{i,k}, \; P''_{i,k}, \; P'''_{i,k}, \; \ldots,$$

die eine oder die zwei gemeinsamen Ecken dreier Polygone

$$P_i, \; P_k, \; P_l$$

aber durch

$$\mathfrak{q}'_{i,k,l} \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}''_{i,k,l},$$

so gelten nach § 20 die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
{}^{*)}\,1)\quad C_1(P_1) &= \sum_{a_1} C_1(P_{1,2}^{(a_1)}) + \sum_{b_1} C_1(P_{1,3}^{(b_1)}) + \sum_{c_1} C_1(P_{1,m}^{(c_1)}) + \cdots \\
&\quad + \sum_{k_1, l_1} C_1(\mathfrak{q}'_{1,k_1,l_1}) + \sum_{k_1, l_1} C_1(\mathfrak{q}''_{1,k_1,l_1}), \\
C_2(P_2) &= \sum_{a_2} C_2(P_{2,1}^{(a_2)}) + \sum_{b_2} C_2(P_{2,3}^{(b_2)}) + \sum_{c_2} C_2(P_{2,m}^{(c_2)}) + \cdots \\
&\quad + \sum_{k_2, l_2} C_2(\mathfrak{q}'_{2,k_2,l_2}) + \sum_{k_2, l_2} C_2(\mathfrak{q}''_{2,k_2,l_2}), \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

*) Durch den Index i der Charakteristiken C eines Polygones P_i, seiner Kantenzüge $P_{i,k}^{(h)}$ und seiner Teilpunkte $q_{i,k,l}$ soll angedeutet werden, dafs P_i allemal als Randpolygon der eingeschlossenen Fläche S_i aufzufassen ist,

$$C_i(P_i) = C(P(S_i)).$$

$$C_m(P_m) = \sum_{a_m} C_m(P^{(a_m)}_{m,1}) + \sum_{b_m} C_m(P^{(b_m)}_{m,2}) + \sum_{c_m} C_m(P^{(c_m)}_{m,m-1}) + \cdots$$
$$+ \sum_{k_m, l_m} C_m(\mathfrak{q}'_{m,k_m,l_m}) + \sum_{k_m,l_m} C_m(\mathfrak{q}''_{m,k_m,l_m}),$$

wo die rechtsstehenden Summationen über die Charakteristiken der Kanten und Ecken des Netzes auszuführen sind.

Zufolge der Beziehung

2) $$C_i(P^{(h)}_{i,k}) + C_k(P^{(h)}_{k,i}) = 0$$

giebt die Addition der m Gleichungen 1):

3) $$\sum_{i=1}^{m} C_i(P_i) = \sum_i \Big(\sum_{k_i, l_i} \big(C_i(\mathfrak{q}'_{i,k_i,l_i}) + C_i(\mathfrak{q}''_{i,k_i,l_i}) \big) \Big).$$

Die Summe der Charakteristiken der Ecken eines allgemeinen m-teiligen Netzes ist also unabhängig von der Reihenfolge, in welcher dieselben eingeführt werden, nämlich gleich der Summe der Charakteristiken der m Grundpolygone.

Zur näheren Erläuterung dieses Resultates betrachte man auf dem Heptaeder

$$\langle\alpha_0\rangle_6 : | \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_5, \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_4\rangle_5, \langle\alpha_5\rangle_3, \langle\alpha_6\rangle_5$$

ein dreiteiliges Netz N_3 mit den drei Bestandteilen

$$S_1 \equiv \langle\alpha_0\rangle_6, \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_5\rangle_3;\ S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_5,\ S_3 \equiv \langle\alpha_4\rangle_5, \langle\alpha_6\rangle_5.$$

Mit Bezug auf die beiden Ecken des Netzes

$$(\langle\alpha_6\rangle_5, \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_5) \equiv \mathfrak{q}_1;\quad (\langle\alpha_4\rangle_5, \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_5 \equiv \mathfrak{q}_2$$

hat man:

1) $$C_1(\mathfrak{q}_1) = 0,\quad C_2(\mathfrak{q}_1) = +2,\quad C_3(\mathfrak{q}_1) = +1,$$
$$C_1(\mathfrak{q}_2) = 0,\quad C_2(\mathfrak{q}_2) = +2,\quad C_3(\mathfrak{q}_2) = +1,$$

mit Bezug auf die drei Bestandteile S_i:

2) $$C(P(S_1)) = -3,\quad C(P(S_2)) = +5,\quad C(P(S_3)) = +4.$$

Also ergiebt sich entsprechend dem Satze:

3) $$\sum_{i=1}^{3} (C_i(\mathfrak{q}_1) + C_i(\mathfrak{q}_2)) = 6 = \sum_{i=1}^{3} C(P(S_i)).$$

Als zweites Beispiel diene das demselben Heptaeder zugehörige vierteilige Netz

$$S_0 \equiv \langle\alpha_0\rangle_6, \quad S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_5, \quad S_2 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_4\rangle_5,$$
$$S_3 \equiv \langle\alpha_5\rangle_3, \langle\alpha_6\rangle_5.$$

Die Charakteristiken der vier Ecken des Netzes

$$(\langle\alpha_6\rangle_5, \langle\alpha_0\rangle_6, \langle\alpha_1\rangle_3) \equiv \mathfrak{q}_1; \quad (\langle\alpha_2\rangle_5, \langle\alpha_0\rangle_6, \langle\alpha_3\rangle_3) \equiv \mathfrak{q}_2;$$
$$(\langle\alpha_4\rangle_5, \langle\alpha_0\rangle_6, \langle\alpha_5\rangle_3) \equiv \mathfrak{q}_3; \quad (\langle\alpha_2\rangle_5, \langle\alpha_4\rangle_5, \langle\alpha_6\rangle_5 \equiv \mathfrak{q}_4$$

bestimmen sich durch:

1) $$\begin{aligned} C_0(\mathfrak{q}_1) &= 2, & C_1(\mathfrak{q}_1) &= 0, & C_3(\mathfrak{q}_1) &= 1, \\ C_0(\mathfrak{q}_2) &= 2, & C_2(\mathfrak{q}_2) &= 0, & C_1(\mathfrak{q}_2) &= 1, \\ C_0(\mathfrak{q}_3) &= 2, & C_3(\mathfrak{q}_3) &= 0, & C_2(\mathfrak{q}_3) &= 1, \\ C_1(\mathfrak{q}_4) &= 1, & C_2(\mathfrak{q}_4) &= 1, & C_3(\mathfrak{q}_4) &= 1. \end{aligned}$$

Die Charakteristiken der Randpolygone P_i der vier Bestandteile S_i ihrerseits sind:

2) $C_0(P_0) = 6, \quad C_1(P_1) = 2, \quad C_2(P_2) = 2, \quad C_3(P_3) = 2.$

Demnach resultiert

3) $$\sum_{i=1}^{4}(C_{i_1}(\mathfrak{q}_i) + C_{i_2}(\mathfrak{q}_i) + C_{i_3}(\mathfrak{q}_i)) = 6 \,.\, 2 = \sum_{k=0}^{3} C_k(P_k).$$

Es ist kein zufälliges Zusammentreffen, daſs der Ausdruck $\sum_i C_i(P_i)$ in dem Falle des dreiteiligen Netzes den Wert $2 \cdot 3 \cdot 1$, in dem Falle des vierteiligen den Wert $2 \cdot 3 \cdot 2$ besitzt. Vielmehr gilt ganz allgemein:

Theorem 17. *Die Summe der Charakteristiken der Randpolygone P_i eines aus m einfach berandeten Flächen S_i bestehenden Netzes berechnet sich allemal durch die Formel:*

$$\sum_{i=1}^{m} C_i(P_i) = 2 \cdot 3 \cdot (m - 2).$$

Zum Beweise wird vorausgesetzt, der Satz sei für Netze mit weniger als m Flächen S_i bereits als richtig erkannt. Reduciert man nun ein m-teiliges Netz

$$N_m \equiv S_1, S_2, \ldots, S_{m-1}, S_m$$

durch Ausscheidung eines Kantenzuges (S_{m-1}, S_m) auf ein $(m-1)$-teiliges Netz

$$N_{m-1} \equiv S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_{m-2},\ S'_{m-1},$$
$$(S'_{m-1} = S_{m-1} + S_m)$$

so gelten die Relationen

1) mit Bezug auf das $(m-1)$-teilige Netz N_{m-1}:

$$C_1(P_1)+C_2(P_2)+\cdots+C_{m-2}(P_{m-2})+C_{m-1}(P'_{m-1})=2\cdot 3\,(m-3),$$

2) mit Bezug auf das dreiteilige Netz

$$N_3 \equiv S'_{m-1},\ S_{m-1},\ S_m:$$
$$-\,C_{m-1}(P'_{m-1}) + C_{m-1}(P_{m-1}) + C_m(P_m) = 2\cdot 3.$$

Die Addition beider Gleichungen ergiebt

3) $C_1(P_1)+C_2(P_2)+\cdots+C_{m-1}(P_{m-1})+C_m(P_m)=2\cdot 3\cdot(m-2).$

Der aufgestellte Satz ist somit allgemein gültig, wenn er für ein dreiteiliges Netz besteht.

Ein solches sei gegeben durch

$$N_3 \equiv S_1,\ S_2,\ S_3$$

und habe die beiden Ecken

$$\mathfrak{q} \equiv (\langle\alpha_1\rangle_{a_1},\ \langle\alpha_2\rangle_{a_2},\ \langle\alpha_3\rangle_{a_3}),\quad \mathfrak{r} \equiv (\langle\beta_1\rangle_{b_1},\ \langle\beta_2\rangle_{b_2},\ \langle\beta_3\rangle_{b_3}),$$

wo gleichindicierte Flächen $\langle\alpha_i\rangle_{a_i}$ und $\langle\beta_i\rangle_{b_i}$ demselben Bestandteile S_i angehören und zunächst als von einander verschieden vorausgesetzt werden. Ferner seien die den Randpolygonen P_i der Flächen S_i paarweise gemeinsamen Züge bezeichnet durch resp.

$$P_{1,2} \equiv P_{2,1},\quad P_{2,3} \equiv P_{3,2},\quad P_{3,1} \equiv P_{1,3}.$$

Es kann die Ecke $\mathfrak{q}$ in den durch sie geteilten drei ebenen Kantenzügen

$$(P_1,\ \langle\alpha_1\rangle),\quad (P_2,\ \langle\alpha_2\rangle),\quad (P_3,\ \langle\alpha_3\rangle)$$

nur zwei wesentlich verschiedene Lagen haben:

1) entweder teilt sie *einen* Zug, etwa $(P_1, \langle\alpha_1\rangle)$, in *zwei mindestens zweikantige* Züge,

2) oder sie teilt *zwei* Züge, etwa $(P_1, \langle\alpha_1\rangle)$ und $(P_2, \langle\alpha_2\rangle)$, *in je eine* Kante und je einen *zwei-* oder *mehrkantigen* Zug.

Aus der ersten Annahme folgt nämlich, dafs die Flächen $\langle\alpha_2\rangle_{a_2}$ und $\langle\alpha_3\rangle_{a_3}$ mit dem Polygone P_1 genau je eine Kante gemein haben, und hieraus, dafs eine von ihnen, etwa $\langle\alpha_2\rangle_{a_2}$,

mindestens zwei benachbarte, die andere aber genau eine Kante des Zuges $P_{2,3}$ enthält. Gemäfs der Definition der Charakteristik einer Teilecke eines ebenen Kantenzuges durch den Überschufs der Charakteristik des Zuges über die Summe der Charakteristiken der Teilzüge findet man daher:

$$C_1(\mathfrak{q}) = +2, \quad C_2(\mathfrak{q}) = +1, \quad C_3(\mathfrak{q}) = 0.$$

Aus der zweiten möglichen Annahme, dafs die Flächen $\langle\alpha_1\rangle_{a_1}$ und $\langle\alpha_2\rangle_{a_2}$ mit den Zügen $P_{3,1}$ und $P_{1,2}$ resp. je eine Kante, mit den anderen $P_{1,2}$ und $P_{2,3}$ resp. je einen zwei- oder mehrkantigen Zug gemein haben, ergiebt sich, dafs die Fläche $\langle\alpha_3\rangle_{a_3}$ genau eine Kante des Zuges $P_{2,3}$ und einen mindestens zweikantigen Zug von $P_{3,1}$ enthält. Man findet demnach:

$$C_1(\mathfrak{q}) = C_2(\mathfrak{q}) = C_3(\mathfrak{q}) = +1.$$

Ganz analog werden sich die der zweiten Ecke $\mathfrak{r}$ des Netzes als einem Teilpunkte der drei Züge

$$(P_1, \langle\beta_1\rangle), \quad (P_2, \langle\beta_2\rangle), \quad (P_3, \langle\beta_3\rangle)$$

zukommenden Charakteristiken berechnen, so dafs *bei verschiedenen Flächentripeln*

$$\langle\alpha_1\rangle_{a_1}, \langle\alpha_2\rangle_{a_2}, \langle\alpha_3\rangle_{a_3} \quad \text{und} \quad \langle\beta_1\rangle_{b_1}, \langle\beta_2\rangle_{b_2}, \langle\beta_3\rangle_{b_3}$$

allemal die Relation gilt:

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) = 3 = \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}).$$

Dieses Resultat bleibt auch noch in dem Falle zweier coincidenten Flächen $\langle\alpha_i\rangle_{a_i}$ und $\langle\beta_i\rangle_{b_i}$ bestehen, wenn nur $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ durch mindestens zwei Kanten getrennt sind. Sind sie dagegen Ecken derselben Kante $|\alpha_1, \alpha_2|$, so hat man rücksichtlich ihrer Lagen innerhalb der $2 \cdot 3$ Züge $(P_i, \langle\alpha_i\rangle)$ und $(P_i, \langle\beta_i\rangle)$ die folgenden Möglichkeiten in Betracht zu ziehen:

I. Entweder teilt die Ecke $\begin{matrix}\mathfrak{q}\\ \mathfrak{r}\end{matrix}$ den Zug $\begin{matrix}(P_3, \langle\alpha_3\rangle)\\ (P_3, \langle\beta_3\rangle)\end{matrix}$ in zwei Kanten und folglich die Züge $\begin{matrix}(P_1, \langle\alpha_1\rangle)\\ (P_1, \langle\beta_1\rangle)\end{matrix}$ und $\begin{matrix}(P_2, \langle\alpha_2\rangle)\\ (P_2, \langle\beta_2\rangle)\end{matrix}$ in je eine Kante und einen mindestens zweikantigen Zug,

II. oder es teilt $\begin{matrix}\mathfrak{q}\\ \mathfrak{r}\end{matrix}$ den Zug $\begin{matrix}(P_3, \langle\alpha_3\rangle)\\ (P_3, \langle\beta_3\rangle)\end{matrix}$ in eine Kante und einen mindestens zweikantigen Zug und folglich einen der

beiden Züge $\frac{(P_1, \langle\alpha_1\rangle)}{(P_1, \langle\beta_1\rangle)}, \frac{(P_2, \langle\alpha_2\rangle)}{(P_2, \langle\beta_2\rangle)}$ in zwei Kanten, den anderen in eine Kante und einen zwei- oder mehrkantigen Zug,

III. oder es teilt $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$ den Zug $\frac{(P_3, \langle\alpha_3\rangle)}{(P_3, \langle\beta_3\rangle)}$ in zwei wenigstens zweikantige Züge und demnach die Züge $\frac{(P_1, \langle\alpha_1\rangle)}{(P_1, \langle\beta_1\rangle)}$ und $\frac{(P_2, \langle\alpha_2\rangle)}{(P_2, \langle\beta_2\rangle)}$ in je zwei Kanten,

in allen drei Fällen die durch $\frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$ geteilten Züge $\frac{(P_1, \langle\alpha_1\rangle)}{(P_1, \langle\beta_1\rangle)}$ und $\frac{(P_2, \langle\alpha_2\rangle)}{(P_2, \langle\beta_2\rangle)}$ auf der einen Seite bis zu der Ecke $\frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{q}}$ gerechnet.

Indem man der Reihe nach jede Lage von $\mathfrak{q}$ mit jeder Lage von $\mathfrak{r}$ kombiniert, und dabei $\mathfrak{q}$ als erste, $\mathfrak{r}$ als zweite Teilecke betrachtet, erhält man für die Charakteristiken $C_i(\mathfrak{q})$ und $C_i(\mathfrak{r})$ die Wertesysteme:

I	$C_3(\mathfrak{q}) = 0$,	$C_1(\mathfrak{q}) = 1$,	$C_2(\mathfrak{q}) = 1$,
I_1	$C_3(\mathfrak{r}) = 0$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 2$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 2$,
I_2	$C_3(\mathfrak{r}) = 1$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 1, 2$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 2, 1$,
I_3	$C_3(\mathfrak{r}) = 2$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 1$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 1$,

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) + \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}) = 6;$$

II	$C_3(\mathfrak{q}) = 1$,	$C_1(\mathfrak{q}) = 0$,	$C_2(\mathfrak{q}) = 1$,
II_1	$C_3(\mathfrak{r}) = 0$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 2$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 2$,
II_2	$C_3(\mathfrak{r}) = 1$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 1, 2$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 2, 1$,
II_3	$C_3(\mathfrak{r}) = 2$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 1$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 1$,

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) + \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}) = 6;$$

III	$C_3(\mathfrak{q}) = 2$,	$C_1(\mathfrak{q}) = 0$,	$C_2(\mathfrak{q}) = 0$,
III_1	$C_3(\mathfrak{r}) = 0$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 2$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 2$,
III_2	$C_3(\mathfrak{r}) = 1$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 1, 2$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 2, 1$,
III_3	$C_3(\mathfrak{r}) = 2$,	$C_1(\mathfrak{r}) = 1$,	$C_2(\mathfrak{r}) = 1$,

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) + \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}) = 6.$$

Reduziert sich der Bestandteil S_1 im Besonderen auf das Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$, so hat man:

1) $C_3(\mathfrak{q}) = 0,\quad C_1(\mathfrak{q}) = 1,\quad C_2(\mathfrak{q}) = 1,$

$$C_3(\mathfrak{r}) = 0,\quad C_1(\mathfrak{r}) = 2,\quad C_2(\mathfrak{r}) = 2,$$

$$C_3(\mathfrak{r}) = 1,\quad C_1(\mathfrak{r}) = 2,\quad C_2(\mathfrak{r}) = 1;$$

2) $C_3(\mathfrak{q}) = 1,\quad C_1(\mathfrak{q}) = 1,\quad C_2(\mathfrak{q}) = 0,$

$$C_3(\mathfrak{r}) = 0,\quad C_1(\mathfrak{r}) = 2,\quad C_2(\mathfrak{r}) = 2,$$

$$C_3(\mathfrak{r}) = 1,\quad C_1(\mathfrak{r}) = 2,\quad C_2(\mathfrak{r}) = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) + \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}) = 6.$$

Wenn endlich S_1 und S_2 mit zwei Grenzflächen $\langle\alpha_1\rangle_3$ und $\langle\alpha_2\rangle_3$ eines Tetraeders identisch sind, findet man:

$$C_3(\mathfrak{q}) = 0,\quad C_1(\mathfrak{q}) = 1,\quad C_2(\mathfrak{q}) = 1,$$

$$C_3(\mathfrak{r}) = 0,\quad C_1(\mathfrak{r}) = 2,\quad C_2(\mathfrak{r}) = 2,$$

und demnach wieder:

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) + \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}) = 6.$$

Wie auch die beiden Ecken $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ des gegebenen dreiteiligen Netzes N_3 zu einander liegen mögen, allemal gilt die Relation:

$$\sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{q}) + \sum_{i=1}^{3} C_i(\mathfrak{r}) = 6,$$

folglich, wie behauptet, auch die andere:

$$C_1(P_1) + C_2(P_2) + C_3(P_3) = 2 \cdot 3. \qquad \text{Q. e. d.}$$

Die hiermit ganz allgemein bewiesene Formel

$$\sum_{i=1}^{m} C_i(P_i) = 2 \cdot 3 \cdot (m - 2)$$

schliefst eine Reihe bemerkenswerter Spezialfälle in sich. — Zunächst folgert man:

Unter den m Grundpolygonen P_i eines m-teiligen Netzes

können keinesfalls mehr als m — 1 *Elementarpolygone auftreten.* Für ein dreiteiliges Netz ergiebt sich hieraus der Satz:

Wenn von den drei Grundpolygonen eines Netzes N_3 zwei Elementarpolygone sind, so hat das dritte notwendig die Charakteristik $+6$.

Um weitere Konsequenzen zu ziehen, nehme man an, es sei auf dem Polyeder A_n ein $(m+1)$-teiliges Netz gegeben

$$N_{m+1} \equiv S_0, S_1, S_2, \ldots, S_m,$$

von welchem die m Bestandteile $S_i (i = 1, 2, \ldots)$ mit ebensovielen ebenen Grenzpolygonen $\langle\alpha_i\rangle_{\mu_i}$ identisch sind. Es besteht dann die Beziehung:

$$-C_0(P_0) = \sum_{i=1}^{m} C_i(\langle\alpha_i\rangle_{\mu_i}) - 2 \cdot 3 \cdot (m-1).$$

Dieselbe besagt:

Die Charakteristik c des Randpolygones einer aus m gegebenen ebenen Polygonen $\langle\alpha_i\rangle_{\mu_i}$ zusammengesetzten polyedrischen Fläche ist von deren Zusammensetzungsweise unabhängig und berechnet sich durch

$$c = \sum_{i=1}^{m} \mu_i - 2 \cdot 3 \cdot (m-1).$$

Spezieller folgt:

Setzt man aus m gegebenen ebenen Flächen $\langle\alpha_i\rangle_{\mu_i}$ mit zusammen $6(m-1)$ *Seiten, wie etwa aus zwei Drei-, drei Vier- und sechs Fünfecken eine einfach berandete polyedrische Fläche zusammen, so hat deren Randpolygon allemal die Charakteristik* 0.

Das Theorem (17) gestattet eine wesentliche Erweiterung. Hat man nämlich irgend ein Polyeder A_n, welches aus m isolierten einfach zusammenhängenden Bestandteilen

$$S_1, S_2, \ldots, S_m$$

und aus einer durch deren m Randpolygone

$$P_1, P_2, \ldots, P_m$$

begrenzten, nur Sechsecke enthaltenden Fläche F_m besteht, so kann man durch passende Vereinigung der Sechsecke mit den einzelnen Bestandteilen S_i diese nach und nach zu gleich-

artigen Flächen S_i' ausdehnen, welche nicht nur gleichfalls einander ausschliefsen, sondern zugleich die gesamte Oberfläche S des Polyeders A_n darstellen. Die diese erweiterten Flächen S_i' berandenden Polygone P_i' bilden alsdann ein m-teiliges Netz N_m der Oberfläche S, und ihre Charakteristiken genügen deshalb der Relation:

$$1)\quad C_1'(P_1') + C_2'(P_2') + \cdots + C_m'(P_m') = 2 \cdot 3 \cdot (m-2).$$

Da aber ein jedes Polygon P_i' gemäfs seiner Entstehungsweise mit dem entsprechenden Polygone P_i einen nur Sechsecke enthaltenden Gürtel $G\langle 6\rangle$ einschliefst, gelten nach Theorem 11 die Beziehungen:

$$2)\qquad C_1'(P_1') = C_1(P_1), \ldots, C_m'(P_m') = C_m(P_m).$$

Also folgt:

$$3)\quad C_1(P_1) + C_2(P_2) + \cdots + C_m(P_m) = 2 \cdot 3 \cdot (m-2),$$

und es resultiert der Satz:

Theorem 18. *Zwischen den Charakteristiken der Randpolygone*

$$P_1, P_2, \ldots, P_m$$

einer m-fach berandeten, nur aus Sechsecken $\langle\alpha\rangle_6$ zusammengesetzten Fläche F_m besteht allemal die Gleichung:

$$C(P_1) + C(P_2) + \cdots + C(P_m) = -2 \cdot 3 \cdot (m-2).$$

Man kann diesen sowie den angewandten Hülfssatz auch direkt aus 17 ableiten, indem man die m' Grenzsechsecke der Fläche F_m als m' weitere Bestandteile S_{m+h} auffafst. Dann gilt in Bezug auf das dadurch gebildete $(m+m')$-teilige Netz:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i(P_i) + \sum_{h=1}^{m'} C_{m+h}(\langle\alpha_{m+h}\rangle_6) = 2 \cdot 3\,(m + m' - 2)$$

und wegen

$$C_{m+h}(\langle\alpha_{m+h}\rangle_6) = 6:$$

$$\sum_{i=1}^{m} C_i(P_i) = 2 \cdot 3(m-2).$$

Für die Charakteristiken der Randpolygone P_1 und P_2 eines nur Grenzsechsecke $\langle\alpha\rangle_6$ enthaltenden Gürtels folgt hieraus:

$$C_1(P_1) + C_2(P_2) = 0.$$

Nach den §§ 13 und 14 stellt allgemein eine aus Grenzsechsecken $\langle\alpha\rangle_6$ zusammengesetzte Fläche

$$F_m \equiv P_1', \; P_2', \; \ldots, \; P_m'$$

eine zu dem auf A_n gegebenen Elementarnetze

$$N_m \equiv P_1, \; P_2, \; \ldots, \; P_m$$

gehörige Elementarfläche vor, wenn je zwei entsprechende Polygone P_i' und P_i einander isomorph sind. Die auf der Fläche F_m der Kante $P_{i,k} \equiv P_{k,i}$ des Netzes N_m entsprechenden isomorphen Kantenzüge seien dargestellt durch

$$P_{i,k}' \equiv \mathfrak{p}_1', \; \mathfrak{p}_2', \; \ldots, \; \mathfrak{p}_r' \quad \text{und} \quad P_{k,i}' \equiv \mathfrak{q}_1', \; \mathfrak{q}_2', \; \ldots, \; \mathfrak{q}_r'.$$

Man ziehe auf F_m aus den Ecken $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{p}_r'$ nach resp. den Ecken $\mathfrak{q}_1'$ und $\mathfrak{q}_r'$ so zwei Linien L_1' und L_r', dafs sie erstens ein Polygon $\langle\alpha'\rangle_6$, wenn überhaupt, nur in *einem* Zuge schneiden, dafs sie ferner weder sich selbst noch einander durchsetzen, und dafs sie endlich zusammen mit den Zügen $P_{i,k}'$ und $P_{k,i}'$ einen Flächenteil $\Sigma_{i,k}'$ einschliefsen, der keines der m Randpolygone P' enthält. Indem man dann diese Linien L_1' und L_2' durch diejenigen Kantenzüge $Z_{\mathfrak{p}'_1}^{\mathfrak{q}'_1}$ und $Z_{\mathfrak{p}'_r}^{\mathfrak{q}'_r}$ ersetzt, welche von den aufserhalb $\Sigma_{i,k}'$ liegenden Randzügen der von L_1' und L_r' durchschnittenen Polygone $\langle\alpha'\rangle_6$ gebildet werden, erhält man auf F_m eine einfach berandete nur Sechsecke enthaltende Fläche

$$P(S_{i,k}') \equiv P_{i,k}', \; Z_{\mathfrak{p}'_r}^{\mathfrak{q}'_r}, \; P_{k,i}', \; Z_{\mathfrak{q}'_1}^{\mathfrak{p}'_1}.$$

Diese Verbindungsfläche $S_{i,k}'$ der beiden isomorphen Kantenzüge $P_{i,k}'$ und $P_{k,i}'$ kann allemal als ein Bestandteil eines Hexagonoides H_6 aufgefafst werden.

Zunächst erhellt, dafs das Randpolygon der Fläche als aus durchweg verschiedenen Kanten bestehend aufzufassen ist. Denn für den Fall, dafs die Züge $Z_{\mathfrak{p}'_1}^{\mathfrak{q}'_1}$ und $Z_{\mathfrak{p}'_r}^{\mathfrak{q}'_r}$ eine oder mehrere Kantenfolgen gemein haben, läfst sich dieser Zusammenhang durch eine zweckmäfsige die Fläche gestaltlich nicht ändernde stetige Variation derselben leicht aufheben.

Wählt man nun eine beliebige der eingeschlossenen Grenz-

flächen $\langle\beta_0\rangle_6$ zur Grundfläche und teilt von ihr aus $S'_{i,k}$ in ein System an einander grenzender Elementarstreifen,

$$\begin{aligned} S'_{i,k} \equiv\; & \langle\beta_0\rangle_6, \\ & \langle\beta_1'\rangle_6,\ \langle\beta_2'\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_6'\rangle_6, \\ & \langle\beta_1''\rangle_6,\ \langle\beta_2''\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_{12}''\rangle_6, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

so kommen a priori drei Möglichkeiten in Betracht:

1) entweder gehört jede Fläche $\langle\alpha'\rangle_6$ von $S'_{i,k}$ einem und nur einem Elementarstreifen an und hat infolge dessen auch nur eine einzige Bezeichnung $\langle\beta_i^{(\varrho)}\rangle_6$;

2) oder es existiert ein erster Elementarstreifen $S^{(h)}$, bei welchem zwei *nicht benachbarte* Flächen $\langle\beta_x^{(h)}\rangle_6$ und $\langle\beta_y^{(h)}\rangle_6$ eine Kante gemein haben und die demgemäfs auch dem $(h+1)^{\text{ten}}$ Elementarstreifen angehören,

$$\langle\beta_x^{(h)}\rangle_6 \equiv \langle\beta_{x_1}^{(h+1)}\rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle\beta_y^{(h)}\rangle_6 \equiv \langle\beta_{y_1}^{(h+1)}\rangle_6;$$

3) oder es existiert ein erster Elementarstreifen $S^{(h)}$, dessen Randpolygon $P^{(h)}$ mit einer Fläche $\langle\beta^{(h+1)}\rangle_6$ zwei getrennte Kantenzüge gemein hat.

Im ersten Falle ist offenbar die Verbindungsfläche $S'_{i,k}$ in der That ein Bestandteil des zur Grundfläche gehörigen Hexagonoides H_6.

Im zweiten Falle kann man, unbeschadet der Allgemeinheit, annehmen, dafs der Elementarstreifen $S^{(h)}$ vollständig sei, dafs also sein Randpolygon $P^{(h)}$ die Form hat:

$$P^{(h)} \equiv /\ \beta_1^{(h)}\ \backslash/\backslash \ldots /\backslash/\ \beta_{1+h}^{(h)}\ \backslash/\backslash \ldots$$
$$/\backslash/\ \beta_{1+5h}^{(h)}\ \backslash/\backslash \ldots /\backslash/.$$

Sollen dann zwei getrennte Kanten bezw. Kantenzüge dieses Polygones zusammenfallen, so kann das nur auf eine der folgenden zwei Arten geschehen:

1) $P^{(h)} \equiv$ [Figur mit $P_1^{(h)}$, -2, $+1$, $+1$, -2, $P_2^{(h)}$]

2) $P^{(h)} \equiv$

In beiden Fällen haben die Polygone $P_1^{(h)}$ und $P_2^{(h)}$ die Charakteristiken

$$c_1 = a_3' - 2, \quad c_2 = a_3'' - 2; \quad a_3' + a_3'' = 4.$$

Keine derselben hat den Wert ± 6, also kann keines der beiden Polygone eine nur Sechsecke enthaltende Fläche berânden. Dieser Schlufs verstöfst aber gegen die ursprüngliche Voraussetzung, nach welcher das Randpolygon der Fläche $S'_{i,k}$ ein einteiliges ist. Die Annahme 2) ist mithin unzulässig.

Im dritten Falle kann die Verbindung zweier getrennten Kantenzüge des Polygones $P^{(h)}$ durch eine Fläche $\langle \beta_1^{(h+1)} \rangle_6$ auf folgende sieben Arten erfolgen:

1) $P^{(h)} \equiv$

2) $P^{(h)} \equiv$

3) $P^{(h)} \equiv$

4) $P^{(h)} \equiv$

5) $P^{(h)} \equiv$

6) $P^{(h)} \equiv$

7) $P^{(h)} \equiv$

Hiernach haben die Polygone $P_1^{(h)}$ und $P_2^{(h)}$ die Charakteristiken

1, 2, 6) $$c_1 = a_3' - 2, \quad c_2 = a_3'' - 2, \quad a_3' + a_3'' = 4;$$

3) $$c_1 = a_3' - 2, \quad c_2 = a_3'' - 3, \quad a_3' + a_3'' = 5;$$

4) $$c_1 = a_3' - 3, \quad c_2 = a_3'' - 1, \quad a_3' + a_3'' = 4;$$

5) $$c_1 = a_3' - 3, \quad c_2 = a_3'' - 2, \quad a_3' + a_3'' = 5;$$

7) $$c_1 = a_3' - 3, \quad c_2 = a_3'' - 3, \quad a_3' + a_3'' = 6.$$

Da keine dieser Charakteristiken den Wert ± 6 hat, verstöfst die gemachte Annahme gegen die Einteiligkeit des Randpolygones der Fläche $S_{i,k}$. Q. e. d.

Das Resultat dieser Überlegungen besteht also in dem Satze:

Eine Kante $P_{i,k} \equiv P_{k,i}$ eines Elementarnetzes ist stets zweien sich selbst und einander nicht durchsetzenden Kantenzügen eines Hexagonoides H_6 isomorph, zwischen welchen sich eine einfach berandete Fläche ausbreiten läfst.

In Verbindung mit dem Theoreme 13 folgt hieraus, dafs eine Kante eines Elementarnetzes sowohl selbst als in jedem Teile zu jedem auf H_6 gelegenen Polygone $P(6, m)$ und folglich auch zu jedem sich selbst durchsetzenden Kantenzuge des Hexagonoides allomorph ist. —

Es sei Z irgend ein höchstens fünfkantige ebene Züge enthaltender, der vorgenannten Bedingung genügender Kantenzug eines Polyeders, $\mathfrak{p}$ irgend eine Ecke eines Hexagonoides H_6, so kann man nach Festlegung des dem ersten ebenen Kantenzuge von Z entsprechenden von $\mathfrak{p}$ ausgehenden Zuges auf H_6 offenbar einen jenem isomorphen Kantenzug Z' ziehen. Derselbe wird sich selbst nicht durchsetzen, da sonst Z entgegen der Voraussetzung einen Zug enthalten würde, der einem auf H_6 gelegenen Polygone $P(6, m)$ isomorph wäre. Durch jede Ecke von H_6 gehen mithin sechs dem Zuge Z isomorphe Züge Z', und unter allen diesen giebt es unendlich viele Paare Z_1' und Z_2', die einander nicht durchsetzen und sich daher auch stets durch eine einfach berandete Fläche $S_{i,k}$ verbinden lassen.

Das Kriterium dafür, ob ein Kantenzug eines Polyeders ein Elementarzug sei, oder nicht, besteht also darin, dafs sein Abbild auf einem Hexagonoide H_6 sich selbst nicht durchsetzt, oder sich durchsetzt; jede Kante eines Elementarnetzes ist ein Elementarzug *).

Man denke sich jetzt aus den m Grundpolygonen P_i eines auf dem Polyeder A_n gegebenen Elementarnetzes N_m successive $m - 1$ verschiedene Paare gebildet,

$$P_{i_1}, P_{k_1}; P_{i_2}, P_{k_2}; \ldots; P_{i_{m-1}}, P_{k_{m-1}},$$

so dafs von den beiden Polygonen eines Paares allemal und nur das eine schon einem vorhergehenden Paare angehört. Eine derartige Gruppierung kann folgendermafsen gefunden werden: Man bestimme nämlich zu einem beliebigen Bestandteile, etwa zu S_1, die angrenzenden Flächen, etwa:

$$S_2, S_3, \ldots, S_{h_1},$$

und mittelst derselben die Kanten

$$1) \qquad (S_1, S_2), (S_1, S_3), \ldots, (S_1, S_{h_1}).$$

Ist dann $h_1 = m$, so ist das gesuchte Kantensystem gefunden, wenn nicht, so giebt es unter den angeführten h_1 Bestandteilen jedenfalls einen, etwa S_{h_1}, an welchen noch andere Flächen S_i grenzen, etwa

*) Der Begriff des Elementarzuges ist hier weiter gefafst als wie in § 19. S. 137.

$$S_{h_1+1}, \; S_{h_1+2}, \; \ldots, \; S_{h_2},$$

und diese bestimmen die Kanten

2) $$(S_{h_1}, S_{h_1+1}), \; (S_{h_1}, S_{h_1+2}), \; \ldots, \; (S_{h_1}, S_{h_2}).$$

Ist $h_2 = m$, so liefern die Systeme 1) und 2) ein gesuchtes Kantensystem, andernfalls existiert unter den h_2 angegebenen Bestandteilen wiederum mindestens einer, etwa S_{h_2}, an welchen weitere Flächen S_i grenzen, etwa

$$S_{h_2+1}, \; S_{h_2+2}, \; \ldots, \; S_{h_3},$$

und diesen entsprechend erhält man die Kanten

3) $$(S_{h_2}, S_{h_2+1}), \; (S_{h_2}, S_{h_2+2}), \; \ldots, \; (S_{h_2}, S_{h_3}).$$

Es ist klar, dafs dieses Verfahren, ausreichend weit fortgesetzt, stets zu einem Systeme *von nur* $m - 1$ *Kanten* führt

$$(S_{i_1}, S_{k_1}), \; (S_{i_2}, S_{k_2}), \; \ldots, \; (S_{i_{m-1}}, S_{k_{m-1}}),$$

durch welche alle m *Bestandteile* S_i gehen.

Gemäfs vorstehender Bestimmung kann man nach einer dem Netze N_m entlang erfolgten Elementarerweiterung von A_n auf dem abgeleiteten Polyeder $A_{n'}$ die m isolierten Bestandteile

$$S_1, \; S_2, \; \ldots, \; S_m,$$

mit den entsprechend abgegrenzten $m - 1$ Verbindungsflächen

$$S_{i_1, k_1}, \; S_{i_2, k_2}, \; \ldots, \; S_{i_{m-1}, k_{m-1}}$$

zu einer einzigen einfach berandeten Fläche F' vereinigen:

$$F' \equiv S_{i_1} + S_{i_1, k_1} + S_{k_1} + \cdots + S_{i_{m-1}} + S_{i_{m-1}, k_{m-1}} + S_{k_{m-1}}.$$

Die dann noch übrigen Grenzpolygone von A_n', welche durchgängig Sechsecke sind, mögen die gleichfalls nur einfach berandete Fläche F'' zusammensetzen.

Diese Einteilung der Oberfläche von $A_{n'}$ giebt ein Mittel an die Hand, um für ein auf dem ursprünglichen Polyeder A_n beliebig gezogenes Netz N_m, dessen Kanten sämtlich Elementarzüge sind, auch alle etwa zugehörigen Elementarerweiterungen festzustellen und dadurch zu entscheiden, ob das Netz ein Elementarnetz ist oder nicht.

Man ordne nämlich die von den m Grundpolygonen P_i

des Netzes N_m berandeten Bestandteile S_i in der oben beschriebenen Weise zu $m-1$ Paaren:

$$S_{i_1},\ S_{k_1},\ S_{i_2},\ S_{k_2},\ \ldots,\ S_{i_{m-1}},\ S_{k_{m-1}},$$

konstruiere darauf zu jeder der durch dieselben bestimmten $m-1$ Kanten

$$P_{i_h, k_h} \equiv (S_{i_h},\ S_{k_h}) \equiv P_{k_h, i_h}$$

eine zugehörige elementare Verbindungsfläche

$$S_{i_h, k_h}$$

und setze schliefslich die m ursprünglichen Bestandteile mit den $m-1$ Verbindungsflächen in entsprechender Weise zu der einfach berandeten Fläche F' zusammen,

$$F' \equiv S_{i_1} + S_{i_1, k_1} + S_{k_1} + \cdots + S_{i_{m-1}} + S_{i_{m-1}, k_{m-1}} + S_{k_{m-1}},$$

wobei verschiedene Flächen S_{i_h, k_h} teilweise d. h. in einzelnen Grenzsechsecken coincidieren können.

Wenn man alsdann durch die Kanten des die Fläche F' berandenden Polygones P' ein System von Ebenen legt, welche mit F' zusammen ein Polyeder $A_{n'}$ bestimmen, und die in ihnen gelegenen Grenzflächen des letzteren zu der gleichfalls von P' berandeten Fläche F'' zusammenfafst, so bildet dieselbe mit den m Flächen S_i und den $m-1$ Flächen S_{i_h, k_h} — ein mehreren letzterer gemeinsames Grenzsechseck nur zu einer gerechnet — ein $2m$-teiliges Flächennetz, und es gilt dem Theoreme 18 zufolge die Relation:

$$1)\quad \sum_{i=1}^{m} C(P(S_i)) + \sum_{h=1}^{m-1} C(P(S_{i_h, k_h})) + C(P(F'')) = 6 \cdot (2m-2).$$

Da aber auch die Beziehungen bestehen:

$$2)\quad C(P(S_{i_1, k_1})) = C(P(S_{i_2, k_2})) = \cdots = C(P(S_{i_{m-1}, k_{m-1}})) = 6$$

und

$$3)\quad C(P(S_1)) + C(P(S_2)) + \cdots + C(P(S_m)) = 6 \cdot (m-2),$$

so nimmt die linke Seite der Gleichung 1) die Form an:

$$6(m-2) + 6(m-1) + C(P(F'')).$$

Daher gilt allemal:

$$4)\quad C(P(F'')) = 6.$$

Wie auch die den Zusammenhang der m Bestandteile S_i vermittelnden $m - 1$ Verbindungsflächen S_{i_h, k_h} beschaffen sein mögen, immer besitzt die zusammengesetzte Fläche F' ein Randpolygon der Charakteristik 6.

Hiernach ist die Aufgabe, *alle einem gegebenen Netze N_m zugehörigen Elementarerweiterungen zu finden*, gleichbedeutend mit der anderen, *unter allen einfach berandeten Flächen F' diejenigen zu ermitteln, deren Randpolygone P' irreducibel d. h. Kantenpolygonen eines Hexagonoides H_6 isomorph sind.*

Es wird in dem folgenden Paragraphen gezeigt werden, dafs in jedem gegebenen Falle eine endliche Anzahl von Operationen zur Lösung dieser Aufgabe hinreicht.

Wie ein von zwei isolierten Elementarpolygonen berandeter Elementargürtel G, *so kann auch eine von $m \gtreqless 3$ isolierten*) Kantenpolygonen*

$$P_1, P_2, \ldots, P_m$$

berandete allgemeine Elementarfläche F_m als aus einem ihr isomorphen einfach berandeten Bestandteile $\overline{H}_6$ eines Hexagonoides $\bar{H}_6$ entstanden gedacht werden. Die Berechtigung hierzu ergiebt sich aus folgender Konstruktion:

Man ziehe aus einer in das Innere von F_m einspringenden Ecke $\mathfrak{p}_1$ des Randpolygones P_1 nach einer analogen passend gewählten Ecke $\mathfrak{p}_2$ eines zweiten Randpolygones P_2 einen ganz innerhalb von F_m verlaufenden Kantenzug. Eine derartige Verbindung $Z_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}$ ist stets möglich, da sowohl das Randpolygon P_2 wie die Ecke $\mathfrak{p}_2$ willkürlich sind. Zu dem Zuge $Z_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}$ ziehe man weiter auf den ihm beiderseits angrenzenden Grenzsechsecken von F_m nach den betreffenden Angaben des § 13 zwei isomorphe Kantenzüge $Z_{\mathfrak{p}'_1}^{\mathfrak{p}'_2}$ und $Z_{\mathfrak{p}''_1}^{\mathfrak{p}''_2}$, welche aus zwei Punkten $\mathfrak{p}_1'$ und $\mathfrak{p}_1''$ der in $\mathfrak{p}_1$ zusammenstofsenden Kanten von P_1 nach resp. zwei Punkten $\mathfrak{p}_2'$ und $\mathfrak{p}_2''$ der durch $\mathfrak{p}_2$ gehenden Kanten von P_2 führen. Endlich scheide man den zwischen den Zügen $Z_{\mathfrak{p}'_1}^{\mathfrak{p}'_2}$ und $Z_{\mathfrak{p}''_1}^{\mathfrak{p}''_2}$ liegenden Flächenstreifen

*) Jede einteilige Fläche, von deren m Randpolygonen mindestens zwei einen Kantenzug gemein haben, ist als eine höchstens $(m - 1)$-fach berandete Fläche anzusehen.

aus der Fläche F_m aus und führe dieselbe dadurch in eine ihr isomorphe, aber von nur noch den $m - 2$ Polygonen

$$P_3, P_4, \ldots, P_m$$

und dem Polygone

$$\overline{P}_1 \equiv Z_{\mathfrak{p}_1''}^{\mathfrak{p}_1'} + Z_{\mathfrak{p}'_1}^{\mathfrak{p}'_2} + Z_{\mathfrak{p}_2'}^{\mathfrak{p}_2''} + Z_{\mathfrak{p}_2''}^{\mathfrak{p}_1''}$$

berandete Elementarfläche F_{m-1} über.

Das eben beschriebene Verfahren, auf die Fläche F_{m-1} und jede neu resultierende Fläche F_{m-h} angewandt, wird nach $(m - 1)$-maliger Wiederholung eine der Fläche F_m isomorphe einfach berandete Fläche F_1 ergeben, deren Randpolygon aus durchweg verschiedenen Kanten besteht. Eine solche Fläche F_1 aber ist nach einem früheren Beweise allemal ein Bestandteil $\overline{H}_6$ eines Hexagonoides H_6. Q. e. d.

Aus der Entstehungsweise der Fläche F_1 ergeben sich als charakteristische Merkmale ihres Randpolygones:

1) die Existenz von mindestens $m - 1$ Paaren ungleichseitig isomorpher, in ausspringenden Ecken der Fläche endigender Kantenzüge,

2) der gegenseitige Ausschlufs der Züge je zweier Paare in ihrer einem Umlauf des Polygones entsprechenden Aufeinanderfolge.

Umgekehrt kann jede und nur eine solche hexugonoidische Fläche $\overline{H}_6$, deren Randpolygon beide Eigenschaften aufweist, stetig und sich selbst isomorph in eine m-fach berandete Fläche übergeführt werden.

§ 22. Die Endlichkeit der Elementarerweiterungen bei gegebenem Elementarnetze.

Man denke sich auf einem Polyeder A_n irgend ein Elementarnetz gezogen:

$$N_m \equiv P_1, P_2, \cdots, P_m,$$

und gemäfs den im vorigen Paragraphen entwickelten Methoden alle zu demselben gehörigen Elementarflächen construiert:

$$F_m^{(h)} \equiv P_1^{(h)}, P_2^{(h)}, \cdots, P_m^{(h)}$$

$$(h = 1, 2, 3, \cdots,)$$

wo allgemein $P_i^{(h)}$ dasjenige Randpolygon der Fläche $F_m^{(h)}$ bezeichnet, welches dem Polygone P_i isomorph ist.

Eine beliebige dieser m-fach berandeten Elementarflächen wird durch die gegenseitige Lage ihrer Randpolygone vollkommen und eindeutig bestimmt. Um von letzterer eine deutlichere Vorstellung zu erhalten, ist es zweckmäfsig, den Begriff *der Distanz zweier Randpolygone* einzuführen.

Wird nämlich eine Fläche $F_m^{(h)}$ von einem Randpolygone $P_i^{(h)}$ aus in ein System sich aneinander setzender vollständiger bezw. unterbrochener Elementarstreifen zerlegt:

$$F_m^{(h)} \equiv S_{i,1}^{(h)} + S_{i,2}^{(h)}, \cdots, S_{i,\iota}^{(h)},$$

so mufs man zu einem ersten Streifen $S_{i,d_{i,k}}^{(h)}$ gelangen, dessen freier Rand mindestens einen Kantenzug des Polygones $P_k^{(h)}$ aufweist.

Ganz ebenso mufs man bei einer von dem Polygone $P_k^{(h)}$ aus erfolgenden analogen Zerlegung der Fläche

$$F_m^{(h)} \equiv S_{k,1}^{(h)} + S_{k,2}^{(h)} + \cdots + S_{k,\varkappa}^{(h)}$$

auf einen ersten Streifen $S_{k,d_{k,i}}^{(h)}$ stofsen, dessen freiem Rande mindestens ein Kantenzug des Polygones $P_i^{(h)}$ zugehört.

Aus diesen Definitionen folgt aber, dafs der Streifen $S_{k,1}^{(h)}$ mindestens ein Grenzsechseck des Streifens $S_{i,d_{i,k}}^{(h)}$, aber keine einzige Grenzfläche des vorhergehenden Streifens $S_{i,d_{i,k}-1}^{(h)}$, der Streifen $S_{k,2}^{(h)}$ mindestens ein Sechseck des Streifens $S_{i,d_{i,k}-1}^{(h)}$, aber kein einziges Sechseck des Streifens $S_{i,d_{i,k}-2}^{(h)}$, u. s. w. u. s. w. der Streifen $S_{k,d_{k,i}-1}^{(h)}$ mindestens ein Sechseck des Streifens $S_{i,2}^{(h)}$, aber kein einziges Sechseck des anderen $S_{i,1}^{(h)}$, schliefslich der Streifen $S_{k,d_{k,i}}^{(h)}$ als erster Streifen mindestens ein Sechseck des Streifens $S_{i,1}^{(h)}$ enthält.

Mithin gilt die Beziehung:

$$d_{i,k} = d_{k,i}.$$

Die so durch die gegenseitige Lage der Polygone $P_i^{(h)}$ und $P_k^{(h)}$ definierte positive ganze Zahl $d_{i,k}$ soll den Abstand derselben bezeichnen.

Es sind die $\frac{1}{2}m(m-1)$ paarweisen Abstände $d_{i,k}$ der m Randpolygone $P^{(h)}$ einer Elementarfläche $F_m^{(h)}$ nicht unabhängig von einander, vielmehr reicht schon die Angabe der $m-1$ Abstände eines Polygones von den übrigen hin, um auch deren gegenseitige Distanzen in gewisse endliche Grenzen einzuschliefsen.

Denn seien die Abstände des Polygones $P_1^{(h)}$ von den Polygonen $P_2^{(h)}, P_3^{(h)}, \cdots, P_m^{(h)}$ gegeben durch resp.

$$d_{1,2}^{(h)} \overline{\overline{<}} d_{1,3}^{(h)} \overline{\overline{<}} \cdots \overline{\overline{<}} d_{1,m}^{(h)},$$

so erweitere man die als freischwebend gedachte Fläche S_1 über ihr Randpolygon P_1 hinaus um $d_{1,2}^{(h)}$ Elementarstreifen zu der Fläche $\overline{S}_1$. Da sowohl das Randpolygon $\overline{P}_1$ dieser Fläche als das Randpolygon P_2 der Fläche S_2 nur eine endliche Anzahl von Kantenzügen besitzt, kann $\overline{P}_1$ auch nur endlich viele Züge enthalten, denen auf P_2 ungleichseitig isomorphe Züge entsprechen. Man hat folglich nur eine beschränkte Anzahl $\delta_{1,2}^{(h)}$ von Möglichkeiten, die Fläche $\overline{S}_1$ um die Fläche S_2 zu einer Fläche $S_{1,2}$ zu erweitern.

Jede dieser $\delta_{1,2}^{(h)}$ zusammengesetzten Flächen kann über den sie mitberandenden Kantenzug des Polygones $\overline{P}_1$ hinaus um $d_{1,3}^{(h)} - d_{1,2}^{(h)}$, teilweise nur bis an das Polygon P_2 reichender, Elementarstreifen und über diese hinaus auf nur $\delta_{1,3}^{(h)}$ Arten um die Fläche S_3 zu einer Fläche $S_{1,2,3}$ erweitert werden, u. s. w., u. s. w.

Die gegebenen $m-1$ Distanzen bestimmen somit in der That nur eine endliche Anzahl von Elementarflächen

$$S_{1,2}, \cdots, m$$

und beschränken dadurch das System der übrigen $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Abstände

$$d_{2,3}^{(h)}, d_{2,4}^{(h)}, \cdots, d_{m-1,m}^{(h)}$$

auf eine endliche Anzahl endlicher Wertesysteme.

Dies vorausgeschickt, seien jetzt alle von den m Polygonen P_i berandeten Elementarflächen in eine Reihe geordnet,

I) $$F_m', F_m'', \cdots, F_m^{(h)}, \cdots,$$

so dafs die Bedingungen erfüllt sind:

$$\mathfrak{M}' \lesseqgtr \mathfrak{M}'' \lesseqgtr \cdots \lesseqgtr \mathfrak{M}^{(h)} \lesseqgtr \cdots$$

und

$$D' \lesseqgtr D'' \lesseqgtr \cdots \lesseqgtr D^{(h)} \lesseqgtr \cdots,$$

wo $\mathfrak{M}^{(h)}$ die Anzahl der Grenzsechsecke der Fläche $F_m^{(h)}$, $D^{(h)}$ die gröfste der ihr zugehörigen Distanzen $\delta_{i,k}^{(h)}$ bezeichnet.

Die so geordneten Elementarflächen $F_m^{(h)}$ seien, unter D_1 eine oberhalb $2D'$ gelegene positive ganze Zahl verstanden, weiter in m Gruppen eingeteilt, nämlich:

1) in diejenigen Flächen, bei denen je zwei Randpolygone mindestens den Abstand $D_1 + 1$ haben,

2) in diejenigen Flächen, bei denen zwei Randpolygone höchstens den Abstand D_1, irgend zwei andere aber mindestens den Abstand $D_1 + 1$ haben,

3) in diejenigen Flächen, bei denen *zweimal* zwei Randpolygone höchstens den Abstand D_1, jedes derselben von einem anderen und je zwei solche mindestens den Abstand $D_1 + 1$ haben,

4) in diejenigen Flächen, bei denen drei aus vier, fünf oder sechs Polygonen gebildete Paare höchstens im Abstande D_1, jedes dieser Polygone von einem der übrigen und je zwei der letzteren von einander aber mindestens im Abstande $D_1 + 1$ stehen, u. s. w., u. s. w.,

$m - 1$) in diejenigen Flächen, bei denen $m - 2$ aus $m - 1$ Randpolygonen gebildete Paare höchstens im Abstande D_1, jedes vom m^{ten} Randpolygone aber mindestens im Abstande $D_1 + 1$ steht,

m) in alle Flächen, bei denen die Distanzen von $m - 1$ aus allen m Randpolygonen gebildeten Paaren die Gröfse D_1 nicht übersteigen.

Da die Anzahl der Flächen der letzten Gruppe offenbar endlich ist, folgt, falls die aufgestellte Reihe I) unendlich d. h. so beschaffen ist, dafs zu jeder noch so grofsen Zahl $\mathfrak{M}$ eine noch gröfsere Zahl $\mathfrak{M}^{(h)}$ gefunden werden kann, dafs dann auch eine der $m - 1$ ersten Gruppen unendlich viele Individuen enthalten mufs.

Die zu der ersten Gruppe gehörigen Flächen

$$\Phi'_m,\ \Phi''_m,\ \ldots,\ \Phi_m^{(h)},\ \ldots$$

haben unter der gemachten Annahme $2D' \gtrless D_1$ sämtlich die Eigenschaft, *aus der Fläche F'_m durch entsprechende Elementarerweiterungen ableitbar zu sein.*

Zum Beweise ziehe man auf F'_m ein m-teiliges Netz

$$\overline{N}_m \equiv \overline{P}_1, \overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_m,$$

so dafs je zwei Polygone $\overline{P}_i$ und P'_i einen Elementargürtel $(\overline{P}_i, P'_i)$ beranden und alle m Gürtel die Fläche F'_m einfach zusammensetzen.

Da alsdann $\overline{P}_i$ ganz innerhalb der ersten an P'_i sich ansetzenden D' Elementarstreifen liegt, können auf jeder Fläche $\Phi_m^{(h)}$ die m Randpolygone P_i durch m andere den Polygonen $\overline{P}_i$ isomorphe Polygone $\overline{P}_i^{(h)}$ ersetzt werden, mit welchen sie paarweise m einander ausschliefsende Gürtel beranden. Je m solche Polygone bestimmen aber die vollständige Berandung einer dem auf der Fläche F'_m gezogenen Netze $\overline{N}_m$ zugehörigen Elementarfläche $\varphi_m^{(h)}$.

Entsprechend den $\frac{1}{2}m(m-1)$ Paaren P_i, P_k von Randpolygonen wird die zweite Flächengruppe in ebensoviele Flächenreihen zerfallen.

Da nach Früherem zwei Polygone P_i, P_k bei gegebenem Maximalabstande D_1 nur eine endliche Anzahl $\delta_{i,k}$ allomorpher Flächen $S_{i,k}$ bestimmen, so mufs die zu dem Paare P_1, P_2 gehörige Reihe von Elementarflächen

$$\Psi_m', \Psi_m'', \ldots, \Psi_m^{(h)}, \ldots$$

in eine entsprechende Anzahl von Teilreihen zerfallen:

$$\varphi_m^{(h,1)}, \varphi_m^{(h,2)}, \ldots, \varphi_m^{(h,i)}, \ldots$$

$$h = 1, 2, 3, \ldots, \delta_{1,2},$$

die dadurch charakterisiert sind, dafs alle zu der nämlichen Reihe gehörigen Flächen auch ein und dieselbe zusammengesetzte Fläche $S_{1,2}$ als Bestandteil enthalten.

Was hier von den Flächen der zweiten Gruppe gesagt worden, gilt in entsprechender Weise von den Flächen der dritten, vierten und jeder folgenden bis zu den Flächen der $m-1^{\text{ten}}$ Gruppe.

Es sondern sich nämlich die Flächen der k^{ten} Gruppe in eine endliche Anzahl, etwa in K, Reihen

$$\chi_m^{(h,1)},\ \chi_m^{(h,2)},\ \ldots,\ \chi_m^{(h,i)},\ \ldots,$$

$$h = 1, 2, \ldots, K,$$

deren charakteristische Eigentümlichkeit darin besteht, dafs alle Flächen derselben Reihe aus den nämlichen $a \gtreqless m - 1$ isolierten Flächen

$$S_{i_1, k_1},\ \ldots,\ \ldots,\ S_{i_a, k_a},\ \ldots$$

und aus je einer a-fach berandeten Elementarfläche zusammengesetzt werden.

Die ursprüngliche Flächenreihe I enthält somit aufser den Flächen der m^{ten} Gruppe eine möglicherweise unendliche Anzahl *reducibeler* m-fach berandeter Flächen, nämlich diejenigen der ersten Gruppe, und eine endliche Anzahl solcher Flächenreihen, deren Elemente *von höchstens noch* $m - 1$ isomorphen Polygonen berandet werden.

Indem man aber die obige Einteilung auf jede der letztgenannten und jede neu resultierende unendliche Reihe anwendet, schliefst man:

Die Reihe der von m gegebenen Polygonen P_i berandeten Elementarflächen ist endlich d. h. sie enthält nur eine endliche Anzahl irreducibeler, aus anderen durch Elementarerweiterungen nicht ableitbarer, Flächen, wenn dieses von jeder zu $m - 1$ und einer kleineren Anzahl gegebener Randpolygone gehörigen Reihe von Elementarflächen gilt.

Nach einem § 15 gegebenen Beweise ist aber die Anzahl der von zwei Randpolygonen berandeten irreducibelen Elementargürtel in der That stets endlich. —

Also resultiert der Satz:

Theorem 19. *Zu einem auf der Oberfläche eines Polyeders A_n gezogenen Elementarnetze N_m gehört allemal nur eine endliche Anzahl von irreducibelen elementaren Einschaltungsflächen.*

Mit diesem Satze tritt auch die am Schlusse des vorigen Paragraphen aufgestellte Behauptung in Evidenz.

§ 23. Das n-teilige Elementarnetz.

Unter den Elementarnetzen eines allgemeinen Polyeders bieten diejenigen ein besonderes Interesse, deren Auftreten von dem speciellen Charakter desselben ganz unabhängig ist, welche also für alle allgemeinen Polyeder invariant sind. Die Existenz solcher Netze erhellt aus dem Satze:

Theorem 20. *Auf jedem allgemeinen Polyeder A_n bestimmen die n Grenzpolygone $\langle\alpha_i\rangle_{m_i}$ ein n-teiliges Elementarnetz N_n.*

Der Beweis für diese Behauptung liegt in der Möglichkeit der Konstruktionen zugehöriger Elementarerweiterungen. Es sollen hier nur zwei derselben näher studiert werden, welche einerseits durch ihren universellen und periodischen Charakter an sich schon interessant sind, andererseits für die späteren Betrachtungen von wesentlicher Bedeutung werden.

Der erste einfachere Erweiterungsprocefs Π_1 besteht darin, dafs alle $2n - 4$ Ecken des Polyeders durch ebensoviele Dreiseite $\langle\alpha_{n+h}\rangle_3$ abgeschnitten, und darauf die Grenzflächen des resultierenden Körpers so stetig variiert werden, dafs jedes Dreiseit $\langle\alpha_{n+h}\rangle_3$ mit seinen drei Scheitelflächen und nur mit diesen zum Durchschnitt gelangt. Dadurch gehen die eingeführten $2n - 4$ Grenzdreiseite in ebensoviele Grenzsechsseite über, während die Anzahl der Seiten eines Grenzpolygones $\langle\alpha_{n-h}\rangle$, welche durch die erste Einführung verdoppelt worden, sich wieder auf den ursprünglichen Wert reduziert.

Man erkennt leicht, dafs das resultierende Polyeder A_{3n-4} mindestens zwei einander ausschliefsende vollständige Systeme von Scheitelflächen besitzt. Das eine System wird von den n isolierten Flächen $\langle\alpha_h\rangle_{m_h}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ gebildet, und zwar in der Weise, dafs jede Fläche $\langle\alpha_h\rangle_{m_h}$ ihre ursprünglichen m_h Seitenflächen nunmehr zu Scheitelflächen hat. Das zweite möglicherweise selbst wieder zerfallende System umfafst die gesamten $2n - 4$ neu eingeführten Sechsecke.

Der zweite Erweiterungsprozefs Π_2 *) ergiebt sich, wenn

*) Die Figuren der zweiten Tafel veranschaulichen diejenigen vier Polyeder, die durch Anwendung der Prozesse Π_1 und Π_2 auf das Tetraeder und das Pentaeder entstehen.

man $3n - 6$ Ebenen α_{n+h} nach einander so in die Begrenzung von A_n einführt, dafs jede neu hinzukommende Ebene α_{n+h} von dem zuletzt erhaltenen Polyeder A_{n+h-1} genau eine Kante $| \alpha_{n-h_1}, \alpha_{n-h_2} |$ von A_n abschneidet, und wenn man darauf die eingeführten Grenzflächen durch passende stetige Variation der $4n - 6$ Grenzebenen successive in Grenzsechsecke überführt. — Die zunächst auftretende allgemeinste Form einer eingeführten Grenzfläche entsteht nämlich dadurch, dafs, mit $| \alpha_i; \alpha_l |$ eine Kante von A_n und mit $\langle \alpha_k \rangle$, $\langle \alpha_m \rangle$ die zugehörigen Scheitelflächen dieses Polyeders bezeichnet, die in dem Polyeder A_{4n-6} die Kante $| \alpha_i, \alpha_l |$ abschneidende Fläche $\langle \alpha_{n+1} \rangle$ von den Abschneidungsflächen

$$\langle \alpha_{n+2} \rangle, \langle \alpha_{n+3} \rangle, \langle \alpha_{n+4} \rangle, \langle \alpha_{n+5} \rangle$$

der vier Kanten

$$| \alpha_i, \alpha_k |, \quad | \alpha_k, \alpha_l |, \quad | \alpha_l, \alpha_m |, \quad | \alpha_m, \alpha_i |$$

und den vier Ebenen $\alpha_i, \alpha_k, \alpha_l, \alpha_m$ in den Seiten eines Achteckes geschnitten wird. Dann ist es nach einem § 5 gegebenen Satze stets möglich, die Flächen des Polyeders A_{4n-6} so stetig zu variieren, dafs die Flächen $\langle \alpha_{n+2} \rangle$, $\langle \alpha_{n+3} \rangle$ längs der Kante $| \alpha_k, \alpha_{n+1} |$, die Flächen $\langle \alpha_{n+4} \rangle$, $\langle \alpha_{n+5} \rangle$ längs der Kante $| \alpha_m, \alpha_{n+1} |$ zur Kreuzung gelangen. Dadurch scheiden aber aus der Begrenzung der Fläche $\langle \alpha_{n+1} \rangle$ die beiden Kanten $| \alpha_k, \alpha_{n+1} |$ und $| \alpha_m, \alpha_{n+1} |$ aus, und es geht dieselbe in ein Grenzsechseck über. Indem man nun dieses Verfahren an jeder der eingeführten $3n - 6$ Flächen $\langle \alpha_{n+h} \rangle$, so weit es nötig, durchführt, erhält man in diesen Flächen durchgängig Sechsecke, und in den ursprünglichen n Flächen α_{n-h} genau so viele Seiten, wie sie als Grenzflächen von A_n zählten.

Bezeichnet man die Anzahl der Seitenflächen desjenigen Polyeders, welches nach m-maliger Wiederholung des Konstructionsprozesses Π_1 aus A_n hervorgeht, mit n'_m, die entsprechende Zahl für den Prozefs Π_2 mit n''_m, so hat man zur Berechnung dieser beiden Zahlen die Formeln:

1) $$n'_m = 3n'_{m-1} - 4,$$

2) $$n''_m = 4n''_{m-1} - 6.$$

Aus denselben berechnet sich:

1) $$n'_m = 3^m \cdot n - 2(3^m - 1),$$

2) $$n''_m = 4^m \cdot n - 2(4^m - 1).$$

Wechselt man in der Anwendung der Prozesse Π_1 und Π_2 ab, indem man erst m_1-mal den Prozefs Π_1, dann μ_1-mal den Prozefs Π_2, darauf m_2-mal Π_1, dann μ_2-mal Π_2 anwendet, u. s. w., so erkennt man leicht, dafs die Anzahl ν der Seitenflächen des Endpolyeders A_ν unabhängig von der Reihenfolge der ausgeführten Operationen durch den Ausdruck gegeben wird:

$$\nu = 3^M \cdot 4^{\mathsf{M}} \cdot n - 2(3^M \cdot 4^{\mathsf{M}} - 1),$$

$$M = \sum_i m_i, \qquad \mathsf{M} = \sum_i \mu_i.$$

Die Anzahl x_6' der eingeschalteten Sechsecke beläuft sich hiernach auf:

$$x_6' = 3^M \cdot 4^{\mathsf{M}}(n - 2).$$

Die Unabhängigkeit des Endergebnisses von der Reihenfolge der Prozesse Π_1 und Π_2 erstreckt sich aber nicht nur auf die vorstehenden Anzahlen, es gilt vielmehr der Satz:

Unterwirft man ein Polyeder A_n m-mal dem Prozesse Π_1 und μ-mal dem Prozesse Π_2, so ist das resultierende Endpolyeder von der Reihenfolge der $m + \mu$ Prozesse durchaus unabhängig.

Zum Beweise werde zunächst der einfachste Fall $m = 1$ und $\mu = 1$ vorausgesetzt, so ist zu zeigen, dafs das Polyeder $\Pi_2(\Pi_1(A_n))$ und das Polyeder $\Pi_1(\Pi_2(A_n))$ einander isomorph sind. Dazu beachte man in beiden Fällen die Änderungen in dem gegenseitigen Zusammenhange einer Grenzfläche $\langle\alpha_1\rangle_k$ von A_n zu ihren k Seitenflächen

$$\langle\beta_1\rangle, \langle\beta_2\rangle, \ldots, \langle\beta_k\rangle.$$

Die Operation Π_1 macht eine solche Seitenfläche $\langle\beta_h\rangle$ in eine Scheitelfläche von $\langle\alpha_1\rangle$ mit der einzigen Scheitelkante s_h und dadurch die n Grenzflächen von A_n in die Flächen eines vollständigen Scheitelflächensystemes übergehen. Die darauf erfolgende Operation Π_2 ersetzt die k Scheitelkanten

$$s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}, s_k$$

durch ebensoviele Sechsecke

$$\langle\sigma_1\rangle_6, \langle\sigma_2\rangle_6, \ldots, \langle\sigma_{k-1}\rangle_6, \langle\sigma_k\rangle_6,$$

so dafs irgend ein Sechseck $\langle\sigma_h\rangle_6$ die Flächen $\langle\alpha_1\rangle$ und $\langle\beta_h\rangle$ und ebenso die Flächen $\langle\sigma_{h-1}\rangle$ und $\langle\sigma_{h+1}\rangle$ je einfach scheitelt. Die Flächen $\langle\alpha_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_n\rangle$ zusammen mit den $3n - 6$ Sechsecken $\langle\sigma_h\rangle_6$ bestimmen mithin gleichfalls ein in sich geschlossenes System isolierter Scheitelflächen.

Bei umgekehrter Reihenfolge der Operationen ersetzt der Prozefs Π_2 jede Seitenkante $|\langle\alpha_1\rangle, \langle\beta_k\rangle|$ durch ein Sechseck $\langle\sigma_h\rangle_6$ in der Weise, dafs die Kanten $|\langle\sigma_h\rangle, \langle\alpha_1\rangle|$ und $|\langle\sigma_h\rangle, \langle\beta_h\rangle|$ gegenüberliegende Seiten des Sechseckes $\langle\sigma_h\rangle_6$ werden. Die dann erfolgende Operation Π_1 ersetzt die letzten zwei Kanten durch zwei die Fläche $\langle\sigma_h\rangle_6$ mit $\langle\alpha_1\rangle$ und $\langle\beta_h\rangle$ verbindende Scheitelkanten, die übrigen vier Kanten von $\langle\sigma_h\rangle_6$ durch vier nach weiteren vier Sechsecken $\langle\sigma\rangle_6$ führende Scheitelkanten. Es bestimmen dann die Flächen $\langle\alpha_1\rangle, \ldots, \langle\alpha_n\rangle$ und die $3n - 6$ Sechsecke $\langle\sigma\rangle_6$ wiederum ein in sich geschlossenes, dem im ersten Falle ermittelten vollkommen isomorphes System isolierter Scheitelflächen.

Aus der hiermit bewiesenen Beziehung

$$\Pi_2(\Pi_1(A_n)) \quad \text{isomorph} \quad \Pi_1(\Pi_2(A_n))$$

folgt durch ihre wiederholte Anwendung die andere:

$$\Pi_{i_1}(\Pi_{i_2}(\ldots(\Pi_{i_{m+\mu}}(A_n))\ldots)) \text{ isom. } \Pi_{\iota_1}(\Pi_{\iota_2}(\ldots(\Pi_{\iota_{m+\mu}}(A_n))\ldots)),$$

wo die Anordnung $\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{m+\mu}$ irgend eine Permutation der anderen $i_1, i_2, \ldots, i_{m+\mu}$ bezeichnet. Q. e. d.

Dem Erweiterungsprozesse Π_1 eines Polyeders A_n entspricht eine irreducibele, dem Prozesse Π_2 eine reducibele Einschaltungsfläche.

Denn nimmt man — die erste Behauptung zu verificieren — irgend eine hexagonoidische Einschaltungsfläche mit n den Grenzflächen $\langle\alpha_i\rangle_{m_i}$ von A_n isomorphen Randpolygonen $\langle\alpha'_i\rangle_{m_i}$ an, so kann eines ihrer Grenzsechsecke $\langle\alpha'_{n+h}\rangle_6$ höchstens drei Randflächen $\langle\alpha'_i\rangle_{m_i}$ seiten. Deshalb und weil die n Randflächen $6n - 12$ Kanten zählen, mufs die Einschaltungsfläche sich mindestens aus $2n - 4$ Grenzsechsecken zusammensetzen. Die aus dem Prozefs Π_1 entspringende Erweiterungsfläche ist

daher diejenige, welche die kleinste Zahl von Sechsecken enthält, und als solche irreducibel.

Vergleicht man nun die aus A_n durch die Prozesse Π_1 und Π_2 entstehenden Polyeder A'_{3n-4} und A''_{4n-6} und scheidet aus ihnen nach Festsetzung einer bestimmten Reihenfolge

$$\langle\alpha_1\rangle_{m_1},\ \langle\alpha_2\rangle_{m_2},\ \cdots,\ \langle\alpha_n\rangle_{m_n}$$

successive i entsprechende Flächen

$$\langle\alpha_1'\rangle,\ \langle\alpha_2'\rangle,\ \cdots,\ \langle\alpha_i'\rangle \quad \text{und} \quad \langle\alpha_1''\rangle,\ \langle\alpha_2''\rangle,\ \cdots,\ \langle\alpha_i''\rangle$$

mit ihren jedesmaligen Seitensechsecken aus, so kann man zeigen, dafs in den zurückbleibenden Bestandteilen F_i' und F_i'' der Polyeder A'_{3n-4} und A''_{4n-6} die aus einem Polygone $\langle\alpha_k'\rangle$ $(k = i + h)$ und dessen Seitensechsecken zusammengesetzte Fläche S_k' einem Teile der aus dem entsprechenden Polygone $\langle\alpha_k''\rangle$ und dessen Seitensecksecken gebildeten Fläche S_k'' oder dieser selbst isomorph ist. — Zu dem Ende bezeichne man in A_n die Seitenflächen eines Polygones $\langle\alpha_k\rangle_{m_k}$ in der einem bestimmten Umlauf von $\langle\alpha_k\rangle$ zukommenden Folge durch

$$\langle\varphi_1\rangle,\ \langle\varphi_2\rangle,\ \langle\varphi_3\rangle,\ \cdots,\ \langle\varphi_{m_k}\rangle,$$

und demgemäfs die unter den ausgeschiedenen Flächen

$$\langle\alpha_1\rangle,\ \langle\alpha_2\rangle,\ \cdots,\ \langle\alpha_i\rangle$$

vorhandenen getrennten Folgen derselben durch:

$$\langle\varphi_{a+1}\rangle,\ \langle\varphi_{a+2}\rangle,\ \cdots,\ \langle\varphi_{a_1}\rangle;\ \ \langle\varphi_b\rangle,\ \langle\varphi_{b+1}\rangle,\ \cdots,\ \langle\varphi_{b_1}\rangle;\ \cdots.$$

Wenn dann weiter in den Polyedern A'_{3n-4} und A''_{4n-6} die Seitensechsecke der Flächen $\langle\alpha_k'\rangle_{m_k}$ und $\langle\alpha_k''\rangle_{m_k}$ in entsprechender Folge dargestellt werden durch

$$\langle\psi_1'\rangle_6,\ \langle\psi_2'\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi_{m_k}'\rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle\psi_1''\rangle_6,\ \langle\psi_2''\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi_{m_k}''\rangle_6,$$

mit der Bestimmung, dafs einerseits $\langle\psi_{m_k}'\rangle_6$ und $\langle\psi_1'\rangle_6$ durch die Scheitelkante der Flächen $\langle\alpha_k'\rangle$ und $\langle\varphi_1'\rangle$ gehen, andererseits $\langle\psi_1''\rangle_6$ gemeinsame Seitenfläche von $\langle\alpha_k''\rangle$ und $\langle\varphi_1''\rangle$ ist, werden die unter den Grenzpolygonen der abgesonderten Bestandteile

$$S_1',\ S_2',\ \cdots,\ S_i' \quad \text{und} \quad S_1'',\ S_2'',\ \cdots,\ S_i''$$

enthaltenen Seitenflächen von $\langle\alpha_k'\rangle$ und $\langle\alpha_k''\rangle$ gegeben durch resp.:

1) $\langle\psi_{a-1}'\rangle_6,\ \langle\psi_a'\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi_{a_1}'\rangle_6;\ \ \langle\psi_{b-1}'\rangle_6,\ \langle\psi_b'\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi_{b_1}'\rangle_6;\ \cdots,$

2) $\langle\psi_a''\rangle_6,\ \langle\psi_{a+1}''\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi_{a_1}''\rangle_6;\ \ \langle\psi_b''\rangle_6,\ \langle\psi_{b+1}''\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi_{b_1}''\rangle_6;\ \cdots.$

Es bleiben mithin in den Flächen F_i' und F_i'' als Seitenflächen von $\langle\alpha_k'\rangle$ und $\langle\alpha_k''\rangle$ die Sechsecke:

1) $$\langle\psi'_{a_1+1}\rangle_6,\ \langle\psi'_{a_1+2}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi'_{b-2}\rangle_6,$$
$$\langle\psi'_{b_1+1}\rangle_6,\ \langle\psi'_{b_1+2}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi'_{c-2}\rangle_6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

2) $$\langle\psi''_{a_1+1}\rangle_6,\ \langle\psi''_{a_1+2}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi''_{b-1}\rangle_6,$$
$$\langle\psi''_{b_1+1}\rangle_6,\ \langle\psi''_{b_1+2}\rangle_6,\ \cdots,\ \langle\psi''_{c-1}\rangle_6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

Aus diesen beiden Systemen ist aber unmittelbar ersichtlich, dafs die aus $\langle\alpha_k'\rangle$ und den Sechsecken des ersten Systemes zusammengesetzte Fläche S_k' isomorph ist demjenigen Teile der aus $\langle\alpha_k''\rangle$ und den Sechsecken des zweiten Systemes gebildeten Fläche S_k'', welcher aus letzterer durch Weglassung der Sechsecke $\langle\psi''_{b-1}\rangle_6,\ \langle\psi''_{c-1}\rangle_6,\ \cdots$ entsteht.

Hieraus und weil die aus dem Polygone $\langle\alpha_1'\rangle$ und dessen m_1 Seitensechsecken bestehende Fläche S_1' der aus dem Polygone $\langle\alpha_1''\rangle$ und dessen m_1 Seitensechsecken zusammengesetzten Fläche S_1'' isomorph ist, folgt aber, dafs die aus den n Bestandteilen S_i' bestehende Oberfläche von A'_{3n-4} auf die durch die n Bestandteile S_i'' gebildete Oberfläche von A''_{4n-6} abgebildet werden kann, oder, was dasselbe, dafs die dem Prozesse Π_1 zugehörige Einschaltungsfläche einem Teile der dem Prozesse Π_2 entsprechenden isomorph ist.

Im Gegensatz zu dem Prozesse Π_1 bewahrt der Prozess Π_2 auch dann noch seine Anwendbarkeit, wenn statt eines allgemeinen ein singuläres Polyeder A_n vorliegt. Es läfst sich nämlich das System der k Kanten eines solchen Körpers zufolge der Betrachtungen des § 5 durch ein System ebensovieler Grenzsechsecke abschneiden, von denen die eine m-kantige Ecke abschneidenden wiederum eine m-kantige Ecke bestimmen. Das Polyeder A_n geht dadurch in ein Polyeder A_{n+k} von gleicher Singularität über. Da die Kanten des letzteren sich zu je $2k$ sowohl auf die n Seiten der Randflächen $\langle\alpha_i\rangle_{m_i}$ der k-flächigen Einschaltungsfläche als auf die Kanten der Innenecken dieser Fläche verteilen, wird die entsprechende Wiederholung des Prozesses Π_2 den Körper A_{n+k} in ein gleichartig singuläres Polyeder A_{n+5k} verwandeln. Eine m-malige

Anwendung des Prozesses Π_2 in der angegebenen Weise wird daher ein Polyeder A_{n_m} mit $n_m = n + \frac{4^m - 1}{3} \cdot k$ Grenzflächen ergeben.

§ 24. Elementarinvarianten.

Als Elementarinvarianten eines allgemeinen Polyeders A_n werden alle diejenigen für dasselbe typischen Anzahlen und Eigenschaften bezeichnet, welche bei jeder an dem Polyeder vollzogenen Elementarumformung erhalten bleiben.

Einen interessanten Fall einer solchen Invariante bietet die Charakteristik eines sich selbst nicht durchsetzenden Kantenpolygones, rücksichtlich welcher der Satz gilt:

Zu jedem beliebigen sich selbst nicht durchsetzenden Kantenpolygone $P(c, m)$ eines allgemeinen Polyeders A_n giebt es auf einem aus letzterem durch Elementarumformung abgeleiteten Polyeder $B_{n'}$ ein analoges und der Charakteristik nach ihm gleiches Kantenpolygon $P(c, m')$.

Da nämlich nach den Ausführungen des § 21 die Charakteristik eines einfachen Kantenpolygones P von A_n durch die Einteilungsweise der nicht sechsseitigen ebenen Grenzflächen $\langle\alpha_i\rangle_{m_i}$ in zwei zu seinen beiden Seiten gelegene Gruppen

$$A' \equiv \langle\alpha_1'\rangle_{m'_1},\ \langle\alpha_2'\rangle_{m'_2},\ \ldots,\ \langle\alpha'_p\rangle_{m'_p} \quad \text{und}$$
$$A'' \equiv \langle\alpha_1''\rangle_{m_1''},\ \langle\alpha_2''\rangle_{m_2''},\ \ldots,\ \langle\alpha''_q\rangle_{m''_q}$$

vollkommen und unzweideutig bestimmt ist,

$$\pm c = \sum_{h=1}^{p} m'_h - 6(p-1) = \sum_{h=1}^{q} m''_h - 6(q-1),$$

erhellt die Richtigkeit des aufgestellten Satzes unmittelbar aus der Möglichkeit einer Trennung der $p + q$ Grenzpolygone $\langle\beta_i\rangle_{m_i}$ von $B_{n'}$ in zwei entsprechende Gruppen

$$B' \equiv \langle\beta_1'\rangle_{m_1'},\ \langle\beta_2'\rangle_{m'_2},\ \ldots,\ \langle\beta'_p\rangle_{m'_p} \quad \text{und}$$
$$B'' \equiv \langle\beta_1''\rangle_{m_1''},\ \langle\beta_2''\rangle_{m_2''},\ \ldots,\ \langle\beta''_q\rangle_{m''_q}$$

vermittelst eines sich selbst nicht durchsetzenden Kantenpolygones $P(c, m')$.

Um die Existenz eines solchen Polygones nachzuweisen, fasse man die von den p Grenzflächen

$$\langle\beta_1'\rangle,\ \langle\beta_2'\rangle,\ \ldots,\ \langle\beta_p'\rangle$$

gruppenweise zusammengesetzten einteiligen Flächen ins Auge,

$$S_1',\ S_2',\ \ldots,\ S_a',$$

und verwandele jede der unter denselben vorhandenen mehrfach berandeten Flächen gemäfs der am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Methode mit Hülfe eines aus passend gewählten Kantenzügen bestehenden Querschnittsystemes in eine von nur noch einem, jeden Querschnitt zwar doppelt enthaltenden, sich selbst aber nicht durchsetzenden Kantenpolygone berandete Fläche. Zufolge dieses Verfahrens zerfällt die Oberfläche des Polyeders $B_{n'}$ in μ aus den p Polygonen

$$\langle\beta_1'\rangle_{m_1'},\ \langle\beta_2'\rangle_{m_2'},\ \ldots,\ \langle\beta_p'\rangle_{m_p'}$$

zusammengesetzte einfach berandete Bestandteile $\overline{S_i}$ und in eine aus den $n - p = q$ Polygonen

$$\langle\beta_1''\rangle_{m_1''},\ \langle\beta_2''\rangle_{m_2''},\ \ldots,\ \langle\beta_q''\rangle_{m''_q}$$

sowie von einer gewissen Anzahl von Sechsecken gebildete μ-fach berandete Fläche F_μ. Indem man aber letztere durch Verbindung ihrer μ Randpolygone

$$\overline{P}_1,\ \overline{P}_2,\ \ldots,\ \overline{P}_\mu$$

vermöge $\mu - 1$ in ihr verlaufender Kantenzüge wiederum in eine einfach berandete Fläche verwandelt, findet man in dem Randpolygone dieser ein gesuchtes Kantenpolygon. Q. e. d.

In Anbetracht, dafs aus dem Systeme der nicht sechsseitigen Grenzflächen $\langle\alpha_i\rangle_{m_i}$ eines gegebenen allgemeinen Polyeders sich stets nur eine beschränkte Anzahl verschiedener Gruppen herausgreifen läfst und dafs zwei eine hexagonoidische Fläche berandende Polygone charakteristisch gleich sind, kann das erhaltene Resultat auch so formuliert werden:

Theorem 21. *Die Polygonensysteme aller aus einem gegebenen elementar ableitbaren Polyeder haben ein und dasselbe endliche Charakteristikensystem.*

Es drängt sich hier naturgemäfs die Frage auf, ob und unter welchen Bedingungen die durch den Satz mitaus-

gesprochene Elementarinvarianz eines Kantenpolygones der Charakteristik 0 sich auch auf dessen etwaigen elementaren Charakter erstreckt.

Die Untersuchung auf den einfachsten vorkommenden Fall der Einschaltung bzw. Ausscheidung eines Elementargürtels beschränkend, nehme man auf dem Polyeder A_n zwei einander zweimal durchsetzende Elementarpolygone an:

$$P(0, 2m_1) \equiv Z_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} + Z_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_3} + Z_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_4} + Z_{\mathfrak{p}_4}^{\mathfrak{p}_1},$$

$$P(0, 2m_2) \equiv \overline{Z}_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} + Z_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_3} + \overline{Z}_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_4} + Z_{\mathfrak{p}_4}^{\mathfrak{p}_1}.$$

Nach Einschaltung eines von zwei mit $P(0, 2m_1)$ isomorphen Polygonen berandeten Elementargürtels G verbinde man auf dem resultierenden Polyeder $A_{n'}$ die Eckenpaare

$$\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_4$$

durch zwei dem Gürtel zugehörige Kantenzüge

$$\mathsf{Z}_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_3} \quad \text{und} \quad \mathsf{Z}_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_4}.$$

Dann sind die Bedingungen festzustellen, unter welchen das neu entstehende Kantenpolygon

$$\mathfrak{P} \equiv \overline{Z}_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} + \mathsf{Z}_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_3} + \overline{Z}_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_4} + \mathsf{Z}_{\mathfrak{p}_4}^{\mathfrak{p}_1}$$

wiederum ein Elementarpolygon ist.

Der gemeinsamen Natur der das Polygon $\mathfrak{P}$ zusammensetzenden vier Kantenzüge entsprechend macht die Lösung der Aufgabe vorerst das nähere Studium des Systemes der zu einem gegebenen Kantenzuge eines Elementarhexagonoides H_0 isomorphen Kantenzüge desselben erforderlich.

Es seien auf einem Hexagonoide H_0 zwei beliebige, aber feste Ecken $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ durch irgend zwei Kantenzüge $Z_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ und $\mathsf{Z}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ verbunden. Dieselben werden im allgemeinen durch ϱ getrennte und σ zusammenfallende Paare von Teilzügen ϱ geschlossene Polygone bestimmen,

$$\varrho = 1, 2, 3, \ldots, \quad \sigma = \varrho - 1, \ \varrho, \ \varrho + 1.$$

Da jedes hierbei auftretende Polygon entweder die Charakteristik $c = 0$ oder die andere $c = 6$ hat, also stets eine gerade Charakteristik besitzt, wird es auch allemal eine gerade Zahl von Kanten aufweisen. Dann aber fällt auf jeden der beiden

dasselbe bildenden Teilzüge entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl. Die beiden Kantenzüge $Z_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ und $Z_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ werden mithin unter ihren getrennt verlaufenden Paaren von Teilzügen je eine gleiche Anzahl paarer und je eine gleiche Anzahl unpaarer Züge enthalten, und folglich werden sie überhaupt entweder beide eine gerade oder beide eine ungerade Zahl von Kanten besitzen. Also:

Alle dieselben zwei Ecken eines Elementarhexagonoides H_0 verbindenden Kantenzüge enthalten entweder je eine gerade oder je eine ungerade Anzahl von Kanten.

Zufolge dieses Satzes scheiden sich die Ecken eines Hexagonoides H_0 in zwei vollkommen gesonderte Gruppen, der Art, dafs je zwei Ecken aus ein und derselben Gruppe durch Kantenzüge mit gerader, jede Ecke der einen mit jeder Ecke der anderen Gruppe dagegen durch Kantenzüge mit ungerader Kantenanzahl verbunden werden.

Für ein Hexagonoid H_0 mit den isomorphen durch Elementarstreifen getrennten Polygonen

$$\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ 'P_1(0,2m) \equiv '\mathfrak{a}_1, '\mathfrak{b}_1, '\mathfrak{a}_2, '\mathfrak{b}_2, \ldots, '\mathfrak{a}_m, '\mathfrak{b}_m, \\ P_1(0,2m) \equiv \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m, \\ P_1'(0,2m) \equiv \mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \mathfrak{a}_2', \mathfrak{b}_2', \ldots, \mathfrak{a}_m', \mathfrak{b}_m', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

wo die zu der Kante $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|$ gehörigen rechts- und linksseitigen Gegenkantenfolgen gegeben werden durch resp.

$$|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \quad |\mathfrak{a}_2, \mathfrak{b}_2|, \quad \ldots, \quad |\mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m|$$

und

$$\ldots, \quad |'\mathfrak{a}_1, '\mathfrak{b}_1|, \quad |\mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1|, \quad |\mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1'|, \quad \ldots,$$

wird die eine Gruppe durch alle Ecken $\mathfrak{a}$, *die andere durch alle Ecken* $\mathfrak{b}$ *dargestellt.*

Ebenso wird auf einem Hexagonoide H_0 mit den isomorphen durch Elementarstreifen getrennten Polygonen

$$\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ 'P_3(0,2m) \equiv '\mathfrak{a}_1, '\mathfrak{b}_1, \ldots, '\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, '\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}, '\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+1}, '\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}+1}, \ldots, '\mathfrak{a}_m, '\mathfrak{b}_m, \\ P_3(0,2m) \equiv \mathfrak{a}_1, \mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+1}, \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}+1}, \ldots, \mathfrak{a}_m, \mathfrak{b}_m, \\ P_3'(0,2m) \equiv \mathfrak{a}_1', \mathfrak{b}_1', \ldots, \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}', \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}', \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}+1}', \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}+1}', \ldots, \mathfrak{a}_m', \mathfrak{b}_m', \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}$$

wo zu den mittleren Kanten

$$|\,\mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1\,| \quad \text{und} \quad |\,\mathfrak{b}_p,\ \mathfrak{a}_{p+1}\,|$$

der beiden dreikantigen ebenen Züge des Polygones $P_3(0, 2m)$ resp. die links- und rechtsseitigen Gegenkantenfolgen gehören

$$|\,\mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1\,|,\ \ |\,\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{a}_2\,|,\ \ldots,\ |\,\mathfrak{b}_{p-1},\ \mathfrak{a}_p\,|,\ |\,\mathfrak{b}_p,\ \mathfrak{a}_{p+1}\,|,$$

$$|\,\mathfrak{b}_p,\ \mathfrak{a}_{p+1}\,|,\ \ |\,\mathfrak{b}_{p+1},\ \mathfrak{a}_{p+2}\,|,\ \ldots,\ |\,\mathfrak{b}_{m-1},\ \mathfrak{a}_m\,|,\ |\,\mathfrak{b}_m,\ \mathfrak{a}_1\,|,$$

die eine Gruppe von den Ecken $\mathfrak{a}$, *die andere von den Ecken* $\mathfrak{b}$ *gebildet.*

Was nun die Verteilung eines auf einem Elementarhexagonoide gegebenen Systemes isomorpher Kantenzüge anlangt, so regelt sich dieselbe nach folgendem Gesetze:

*) Auf einem Elementarhexagonoide werden alle einem gegebenen Kantenzuge

$$\ldots,\ \mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_k^{(h)},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_u^{(r)},\ \mathfrak{b}_v^{(s)},\ \ldots$$

isomorphen Kantenzüge,

1) wenn das Hexagonoid ein Polygon $P_1(0, 2m)$ enthält, gegeben durch

$$\ldots,\ \mathfrak{a}_{i+q}^{(g+p)},\ \mathfrak{b}_{k+q}^{(h+p)},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_{u+q}^{(r+p)},\ \mathfrak{b}_{v+q}^{(s+p)},\ \ldots,$$

2) wenn das Hexagonoid ein Polygon $P_3(0, 2m)$ besitzt, dargestellt durch

$$\ldots,\ \mathfrak{a}_i^{(g+p)},\ \mathfrak{b}_k^{(h+p)},\ \ldots,\ \mathfrak{a}_u^{(r+p)},\ \mathfrak{b}_v^{(s+p)},\ \ldots,$$

wo p und q irgend zwei positive oder negative ganze Zahlen bezeichnen, und wo in der Reihe

$$\ldots,\ i+q,\ k+q,\ \ldots,\ u+q,\ v+q,\ \ldots$$

jeder dem absoluten Betrage nach die Zahl m übersteigende Index durch seinen Rest nach m zu ersetzen ist.

Vermöge dieses Satzes gelangt man unter Annahme eines Elementarhexagonoides erster Art

---

*) Der Satz tritt unmittelbar in Evidenz, wenn man von dem gegebenen Kantenzuge zunächst zu einem anderen übergeht, bei welchem die oberen bzw. unteren Indices seiner Ecken um die positive oder negative Einheit verändert sind, und dann von diesem Zuge in analoger Weise fortschreitet.

I. aus jedem Verbindungszuge

$$\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_r,\ \mathfrak{a}_k^{(h)}$$

zweier gleichartigen Ecken

$$\mathfrak{a}_i^{(g)} \text{ und } \mathfrak{a}_k^{(h)}$$

mittelst sechs Paaren isomorpher und gleichgerichteter zweikantiger Züge

1) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g-1)},\ \mathfrak{a}_i^{(g-1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_k^{(h-1)},\ \mathfrak{a}_k^{(h-1)}$,

2) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g-1)},\ \mathfrak{a}_{i+1}^{(g-1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_k^{(h-1)},\ \mathfrak{a}_{k+1}^{h-1}$,

3) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_{i-1}^{(g)},\ \mathfrak{a}_{i-1}^{(g)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_{k-1}^{(h)},\ \mathfrak{a}_{k-1}^{(h)}$,

4) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_{i-1}^{(g)},\ \mathfrak{a}_{i-1}^{(g+1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_{k-1}^{(h)},\ \mathfrak{a}_{k-1}^{(h+1)}$,

5) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g)},\ \mathfrak{a}_{i+1}^{(g)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_{k+1}^{(h)}$,

6) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g)},\ \mathfrak{a}_i^{(g+1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_k^{(h+1)}$ —

II. aus jedem Verbindungszuge

$$\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_r,\ \mathfrak{b}_k^{(h)}$$

zweier ungleichartigen Ecken

$$\mathfrak{a}_i^{(g)} \text{ und } \mathfrak{b}_k^{(h)}$$

mittelst sechs Paaren isomorpher und ungleich gerichteter zweikantiger Züge

1) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g-1)},\ \mathfrak{a}_i^{(g-1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_k^{(h-1)}$,

2) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g-1)},\ \mathfrak{a}_{i+1}^{(g-1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_{k+1}^{(h)},\ \mathfrak{b}_{k+1}^{(h-1)}$,

3) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_{i-1}^{(g)},\ \mathfrak{a}_{i-1}^{(g)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_k^{(h)},\ \mathfrak{b}_{k-1}^{(h)}$,

4) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_{i-1}^{(g)},\ \mathfrak{a}_{i-1}^{(g+1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_k^{(h+1)},\ \mathfrak{b}_{k-1}^{(h+1)}$,

5) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g)},\ \mathfrak{a}_{i+1}^{(g)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_{k+1}^{(h)},\ \mathfrak{b}_{k+1}^{(h)}$,

6) $\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{b}_i^{(g)},\ \mathfrak{a}_i^{(g+1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)},\ \mathfrak{a}_k^{(h+1)},\ \mathfrak{b}_k^{(h+1)}$ —

zu je einem dem gegebenen äquivalenten Eckenpaare.

Auf einem Elementarhexagonoide zweiter Art gelangt man

I. aus jedem zwei gleichartige Ecken

$$\mathfrak{a}_i^{(g)} \text{ und } \mathfrak{a}_k^{(h)}$$

verbindenden Kantenzuge

$$\mathfrak{a}_i^{(g)},\ \mathfrak{z}_1,\ \mathfrak{z}_2,\ \ldots,\ \mathfrak{z}_r,\ \mathfrak{a}_k^{(h)}$$

1) für $i \leq p$ und $k < p$

mittelst der beiden Paare isomorpher und gleichgerichteter zweikantiger Züge

a) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g-1)}, \mathfrak{a}_i^{(g-1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)}, \mathfrak{b}_k^{(h-1)}, \mathfrak{a}_k^{(h-1)}$,

b) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g)}, \quad \mathfrak{a}_i^{(g+1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)}, \mathfrak{b}_k^{(h)}, \quad \mathfrak{a}_k^{(h+1)}$ —

2) für $i \leqq p$ und $k \geqq p + 1$

mittelst der beiden Paare isomorpher und gleichgerichteter zweikantiger Züge

a) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g-1)}, \mathfrak{a}_i^{(g-1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)}, \mathfrak{b}_k^{(h)}, \quad \mathfrak{a}_k^{(h-1)}$,

b) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g)}, \quad \mathfrak{a}_i^{(g+1)}$ und $\mathfrak{a}_k^{(h)}, \mathfrak{b}_k^{(h+1)}, \mathfrak{a}_k^{(h+1)}$ —

II. aus jedem zwei ungleichartige Ecken

$$\mathfrak{a}_i^{(g)} \text{ und } \mathfrak{b}_k^{(h)}$$

verbindenden Kantenzuge

$$\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_r, \mathfrak{b}_k^{(h)}$$

1) für $i \leqq p$ und $k \leqq p$

durch die beiden Paare isomorpher und ungleichgerichteter zweikantiger Züge

a) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g-1)}, \mathfrak{a}_i^{(g-1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)}, \mathfrak{a}_k^{(h)}, \quad \mathfrak{b}_k^{(h-1)}$,

b) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g)}, \quad \mathfrak{a}_i^{(g+1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)}, \mathfrak{a}_k^{(h+1)}, \mathfrak{b}_k^{(h+1)}$ —

2) für $i \leqq p$ und $k \geqq p + 1$

durch die beiden Paare isomorpher und ungleichgerichteter zweikantiger Züge

a) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g-1)}, \mathfrak{a}_i^{(g-1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)}, \mathfrak{a}_k^{(h-1)}, \mathfrak{b}_k^{(h-1)}$,

b) $\mathfrak{a}_i^{(g)}, \mathfrak{b}_i^{(g)}, \quad \mathfrak{a}_i^{(g+1)}$ und $\mathfrak{b}_k^{(h)}, \mathfrak{a}_k^{(h)}, \quad \mathfrak{b}_k^{(h+1)}$ —

zu je einem dem gegebenen äquivalenten Eckenpaare.

Nunmehr zur ursprünglichen Aufgabe zurückkehrend fasse man auf dem aus A_n durch die Einschaltung des Gürtels G abgeleiteten Polyeder $A_{n'}$ das aus den vier Kantenzügen

$$\overline{Z}_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} \equiv \mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \ldots, \mathfrak{t}_i, \mathfrak{p}_2,$$

$$Z_{\mathfrak{p}_2}^{\mathfrak{p}_3} \equiv \mathfrak{p}_2, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_k, \mathfrak{p}_3,$$

$$\overline{Z}_{\mathfrak{p}_3}^{\mathfrak{p}_4} \equiv \mathfrak{p}_3, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots, \mathfrak{y}_l, \mathfrak{p}_4,$$

$$Z_{\mathfrak{p}_4}^{\mathfrak{p}_1} \equiv \mathfrak{p}_4, \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_m, \mathfrak{p}_1$$

zusammengesetzte Polygon $\mathfrak{P}$ auf und vergleiche dasselbe mit zwei auf den Elementarhexagonoiden H_0' und H_0'' der Polygone $P(0, 2m_1)$ und $P(0, 2m_2)$ gezogenen Elementarpolygonen

$$P' \equiv \cdots + Z_{\mathfrak{p}_2'}^{\mathfrak{p}_3'} + \cdots + Z_{\mathfrak{p}_4'}^{\mathfrak{p}_1'} + \cdots,$$

$$P'' \equiv \cdots + \overline{Z}_{\mathfrak{p}_1''}^{\mathfrak{p}_2''} + \cdots + \overline{Z}_{\mathfrak{p}_3''}^{\mathfrak{p}_4''} + \cdots.$$

Da zwei in einer Ecke $\mathfrak{a}$ einer allgemeinen polyedrischen Fläche zusammenstoſsende Kanten $|\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2|$ und $|\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_3|$ in Bezug auf die dritte Kante $|\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}|$ unzweideutig als deren rechts- und linksseitige Nachbarkanten unterschieden werden, so sind auch auf dem Hexagonoide H_0' die den vier Kanten

$$|\mathfrak{p}_1, \mathfrak{t}_1|, \; |\mathfrak{p}_2, \mathfrak{t}_i|, \; |\mathfrak{p}_3, \mathfrak{y}_1|, \; |\mathfrak{p}_4, \mathfrak{y}_l|$$

entsprechenden Kanten

$$|\mathfrak{p}_1', \mathfrak{t}_1'|, \; |\mathfrak{p}_2', \mathfrak{t}_i'|, \; |\mathfrak{p}_3', \mathfrak{y}_1'|, \; |\mathfrak{p}_4', \mathfrak{y}_l'|$$

eindeutig fixiert.

Hieraus aber und aus den obigen Betrachtungen ergiebt sich folgendes Verfahren, den fraglichen Charakter des Polygones $\mathfrak{P}$ festzustellen:

Man bestimme

1) auf dem Hexagonoide H_0' zu den Eckenpaaren

$$\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_4' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3',$$

2) auf dem Hexagonoide H_0'' zu den Eckenpaaren

$$\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2'' \quad \text{und} \quad \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4''$$

die zwei oder sechs nächstliegenden entsprechenden Eckenpaare

1) $\quad \mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_4' \quad$ und $\quad \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3'$,

2) $\quad \mathfrak{q}_1'', \mathfrak{q}_2'' \quad$ und $\quad \mathfrak{q}_3'', \mathfrak{q}_4''$.

Wenn dann unter denselben solche vier Paare existieren, daſs die auf H_0' aus den vier Kanten

$$|\mathfrak{t}_1', \mathfrak{p}_1'|, \; |\mathfrak{t}_i', \mathfrak{p}_2'|, \; |\mathfrak{y}_1', \mathfrak{p}_3'|, \; |\mathfrak{y}_l', \mathfrak{p}_4'|$$

nach den vier Ecken

$$\mathfrak{q}_1', \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3', \mathfrak{q}_4'$$

führenden vier dreikantigen Züge

$$\mathfrak{t}_1', \mathfrak{p}_1', \mathfrak{r}_1, \mathfrak{q}_1', \qquad \mathfrak{t}_i', \mathfrak{p}_2', \mathfrak{r}_2, \mathfrak{q}_2',$$
$$\mathfrak{y}_1', \mathfrak{p}_3', \mathfrak{r}_3, \mathfrak{q}_3', \qquad \mathfrak{y}_l', \mathfrak{p}_4', \mathfrak{r}_4, \mathfrak{q}_4'$$

isomorph und gleichgerichtet sind den auf H_0'' aus den vier Kanten

$$|\mathfrak{t}_1'', \mathfrak{p}_1''|, \ |\mathfrak{t}_i'', \mathfrak{p}_2''|, \ |\mathfrak{y}_1'', \mathfrak{p}_3''|, \ |\mathfrak{y}_i'', \mathfrak{p}_4''|$$

nach den vier Ecken

$$\mathfrak{q}_1'', \mathfrak{q}_2'', \mathfrak{q}_3'', \mathfrak{q}_4''$$

führenden vier dreikantigen Zügen

$$\mathfrak{t}_1'', \mathfrak{p}_1'', \mathfrak{s}_1, \mathfrak{q}_1'', \qquad \mathfrak{t}_i'', \mathfrak{p}_2'', \mathfrak{s}_2, \mathfrak{q}_2'',$$
$$\mathfrak{y}_1'', \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{s}_3, \mathfrak{q}_3'', \qquad \mathfrak{y}_i'', \mathfrak{p}_4'', \mathfrak{s}_4, \mathfrak{q}_4'',$$

so ist das Polygon $\mathfrak{P}$ in der That ein Elementarpolygon.

Denn in diesem und nur in diesem Falle bestimmen die vier Züge

$$\overline{Z}_{\mathfrak{p}_1''}^{\mathfrak{p}_2''}, \ Z_{\mathfrak{p}_2'}^{\mathfrak{p}_3'}, \ \overline{Z}_{\mathfrak{p}_3''}^{\mathfrak{p}_4''}, \ Z_{\mathfrak{p}_4'}^{\mathfrak{p}_1'}$$

mit resp. den ihnen isomorphen Zügen

$$\overline{Z}_{\mathfrak{q}_1''}^{\mathfrak{q}_2''}, \ Z_{\mathfrak{q}_2'}^{\mathfrak{q}_3'}, \ \overline{Z}_{\mathfrak{q}_3''}^{\mathfrak{q}_4''}, \ Z_{\mathfrak{q}_4'}^{\mathfrak{q}_1'}$$

und den aus den 4 . 2 Ecken

$$\mathfrak{p}_1'', \mathfrak{p}_2''; \quad \mathfrak{p}_2', \mathfrak{p}_3'; \quad \mathfrak{p}_3'', \mathfrak{p}_4''; \quad \mathfrak{p}_4', \mathfrak{p}_1'$$

nach den 4 . 2 entsprechenden Ecken

$$\mathfrak{q}_1'', \mathfrak{q}_2''; \quad \mathfrak{q}_2', \mathfrak{q}_3'; \quad \mathfrak{q}_3'', \mathfrak{q}_4''; \quad \mathfrak{q}_4', \mathfrak{q}_1'$$

gezogenen vier Paaren zweikantiger Züge vier einfach berandete Flächen

$$S_{1,2}, \ S_{2,3}, \ S_{3,4}, \ S_{4,1},$$

welche durch passende ihre Gestalten nicht ändernde stetige Variationen zu einem von zwei mit $\mathfrak{P}$ isomorphen Polygonen berandeten Elementargürtel zusammengeschlossen werden können.

Zur näheren Erläuterung des Vorstehenden diene das Verhalten der Elementarpolygone eines durch die Beziehungen

$$\langle\alpha_1\rangle_4 \rangle\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\;\;\;\;\;\;_{\overline{4}} \langle\langle\alpha_4\rangle_4, \quad \langle\alpha_2\rangle_4 \rangle_{\overline{4}} \langle\langle\alpha_5\rangle_4, \quad \langle\alpha_3\rangle_4 \rangle_{\overline{4}} \langle\langle\alpha_6\rangle_4$$

definierten Tetragonhexaeders A_6, welches um einen Elementargürtel erweitert wird. Man schalte erstens längs dem die Bestandteile

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle_4, \langle\alpha_2\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_4 \quad \text{und} \quad S_2 \equiv \langle\alpha_4\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_4, \langle\alpha_6\rangle_4$$

trennenden Elementarpolygone $P(0, 6)$ den Gürtel ein

$$G \equiv \langle\alpha_1'\rangle_6, \langle\alpha_2'\rangle_6, \langle\alpha_3'\rangle_6,$$

so zwar, dafs dessen Flächen mit denjenigen von S_1 und S_2 die drei Eckenpaare bestimmen

$$(\alpha_1, \alpha_3', \alpha_2), (\alpha_5, \alpha_3', \alpha_6); \quad (\alpha_2, \alpha_1', \alpha_3), (\alpha_6, \alpha_1', \alpha_4);$$
$$(\alpha_3, \alpha_2', \alpha_1), (\alpha_4, \alpha_2', \alpha_5).$$

Hierdurch zerfällt das zu A_6 gehörige Elementarpolygon

$$P_1(0,6) \equiv |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_1|, |\alpha_3, \alpha_1|, |\alpha_3, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_6|$$

in die isolierten Teile

$$|\alpha_2, \alpha_3'|, |\alpha_2, \alpha_1|, |\alpha_3, \alpha_1|, |\alpha_3, \alpha_2'| \text{ und } |\alpha_4, \alpha_6|, |\alpha_4, \alpha_5|.$$

Letztere werden aber durch resp. die Züge

$$|\alpha_1', \alpha_3'|, |\alpha_1', \alpha_6| \text{ und } |\alpha_1', \alpha_2'|, |\alpha_4, \alpha_2'|$$

zu einem neuen Elementarpolygone $P_3(0, 10)$ verbunden,

$$P_3(0, 10) \equiv |\alpha_2, \alpha_3'|, |\alpha_2, \alpha_1|, |\alpha_3, \alpha_1|, |\alpha_3, \alpha_2'|, |\alpha_1', \alpha_2'|$$
$$|\alpha_4, \alpha_2'|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_6|, |\alpha_1', \alpha_6|, |\alpha_1', \alpha_3'|.$$

Die nämliche Einschaltung spaltet das auf A_6 gelegene Elementarpolygon

$$P_3(0, 8) \equiv |\alpha_1, \alpha_3|, |\alpha_2, \alpha_3|, |\alpha_4, \alpha_3|, |\alpha_4, \alpha_5|$$
$$|\alpha_4, \alpha_6|, |\alpha_2, \alpha_6|, |\alpha_1, \alpha_6|, |\alpha_1, \alpha_5|$$

in die isolierten Teile

$$|\alpha_2, \alpha_3'|, |\alpha_1, \alpha_3'|, |\alpha_1, \alpha_2'|, |\alpha_1, \alpha_3|, |\alpha_2, \alpha_3|$$

und

$$|\alpha_4, \alpha_6|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_2'|.$$

Diese aber werden durch die Züge

$$|\alpha_1', \alpha_3'|, |\alpha_1', \alpha_6| \text{ und } |\alpha_1', \alpha_3|, |\alpha_1', \alpha_2'|$$

wieder zu einem Elementarpolygone $P_3(0, 12)$ vereinigt,

$$P_3(0, 12) \equiv |\alpha_2, \alpha_3'|, |\alpha_1, \alpha_3'|, |\alpha_1, \alpha_2'|, |\alpha_1, \alpha_3|, |\alpha_2, \alpha_3|,$$
$$|\alpha_1', \alpha_3|, |\alpha_1', \alpha_2'|, |\alpha_4, \alpha_2'|, |\alpha_4, \alpha_5|, |\alpha_4, \alpha_6|,$$
$$|\alpha_1', \alpha_6|, |\alpha_1', \alpha_3'|.$$

Man schalte zweitens längs dem die Bestandteile

$$S_1 \equiv \langle\alpha_2\rangle_4, \langle\alpha_1\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_4 \text{ und } S_2 \equiv \langle\alpha_3\rangle_4, \langle\alpha_4\rangle_4, \langle\alpha_6\rangle_4$$

trennenden Elementarpolygone

$$P_3(0,8) \equiv |\alpha_2, \alpha_3|, \; |\alpha_2, \alpha_4|, \; |\alpha_2, \alpha_6|, \; |\alpha_1, \alpha_6|,$$
$$|\alpha_5, \alpha_6|, \; |\alpha_5, \alpha_4|, \; |\alpha_5, \alpha_3|, \; |\alpha_1, \alpha_3|$$

die Sechsecke ein:

$$\langle\alpha_3'\rangle_6 \,|: \langle\alpha_2\rangle_4, \; \langle\alpha_1\rangle_4, \; \langle\alpha_5\rangle_4, \; \langle\alpha_3\rangle_4, \; \langle\alpha_4\rangle_4, \; \langle\alpha_6\rangle_4;$$
$$\langle\alpha_6'\rangle_6 \,|: \langle\alpha_6\rangle_4, \; \langle\alpha_4\rangle_4, \; \langle\alpha_3\rangle_4, \; \langle\alpha_5\rangle_4, \; \langle\alpha_1\rangle_4, \; \langle\alpha_2\rangle_4,$$

so dafs in dem entstehenden sechskantigen Prisma die Bestandteile S_1, S_2 nur noch die Kanten $|\alpha_2, \alpha_6|$ und $|\alpha_5, \alpha_3|$ gemein haben.

Durch diesen Prozefs wird das zu A_6 gehörige Elementarpolygon

$$P(0,6) \equiv |\alpha_2, \alpha_4|, \; |\alpha_2, \alpha_6|, \; |\alpha_1, \alpha_6|,$$
$$|\alpha_1, \alpha_5|, \; |\alpha_3, \alpha_5|, \; |\alpha_3, \alpha_4|$$

zwar in die isolierten Teile geschieden,

$$|\alpha_2, \alpha_6|, \; |\alpha_2, \alpha_6'|, \; |\alpha_1, \alpha_6'|, \; |\alpha_1, \alpha_5|$$

und

$$|\alpha_3, \alpha_4|, \; |\alpha_3, \alpha_6'|,$$

aus diesen aber durch die Verbindungszüge

$$|\alpha_3', \alpha_6|, \; |\alpha_3', \alpha_4| \quad \text{und} \quad |\alpha_3', \alpha_5|, \; |\alpha_3, \alpha_5|$$

ein neues Elementarpolygon $P_3(0, 10)$ hergestellt,

$$P_3(0,10) \equiv |\alpha_2, \alpha_6|, \; |\alpha_2, \alpha_6'|, \; |\alpha_1, \alpha_6'|, \; |\alpha_1, \alpha_5|, \; |\alpha_3', \alpha_5|,$$
$$|\alpha_3, \alpha_5|, \; |\alpha_3, \alpha_6'|, \; |\alpha_3, \alpha_4|, \; |\alpha_3', \alpha_4|, \; |\alpha_3', \alpha_6|.$$

Dieselbe Einschaltung zerlegt das auf A_6 vorhandene Elementarpolygon

$$P_3(0,8) \equiv |\alpha_1, \alpha_3|, \; |\alpha_2, \alpha_3|, \; |\alpha_4, \alpha_3|, \; |\alpha_4, \alpha_5|,$$
$$|\alpha_4, \alpha_6|, \; |\alpha_2, \alpha_6|, \; |\alpha_1, \alpha_6|, \; |\alpha_1, \alpha_5|$$

in die beiden isolierten Teile

$$|\alpha_2, \alpha_6'|, \; |\alpha_1, \alpha_6'|, \; |\alpha_1, \alpha_5|, \; |\alpha_1, \alpha_3'|, \; |\alpha_2, \alpha_3'|$$

und

$$|\alpha_4, \alpha_6|, \; |\alpha_4, \alpha_6'|, \; |\alpha_4, \alpha_3|.$$

Durch die Einfügung der Kantenzüge

$$|\alpha_6, \alpha_2|, \; |\alpha_6, \alpha_3'| \quad \text{und} \quad |\alpha_3', \alpha_6|, \; |\alpha_3', \alpha_4|$$

erhält man aus ihnen ein Polygon der Charakteristik 0, nämlich:

$$P(0,12) \equiv |\alpha_2, \alpha_6|, \ |\alpha_2, \alpha_6'|, \ |\alpha_1, \alpha_6'|, \ |\alpha_1, \alpha_5|, \ |\alpha_1, \alpha_3'|,$$
$$|\alpha_2, \alpha_3'|, \ |\alpha_3', \alpha_6|, \ |\alpha_3', \alpha_4|, \ |\alpha_4, \alpha_3|, \ |\alpha_4, \alpha_6'|,$$
$$|\alpha_4, \alpha_6|, \ |\alpha_6, \alpha_3'|.$$

Indem man aber durch Umgehung des Sechseckes $\langle\alpha_3'\rangle_6$ statt des Kantenzuges

$$|\alpha_3', \alpha_1|, \ |\alpha_3', \alpha_2|, \ |\alpha_3', \alpha_6|, \ |\alpha_3', \alpha_4|$$

den anderen einführt

$$|\alpha_3', \alpha_5|, \ |\alpha_3', \alpha_3|,$$

gelangt man zu dem benachbarten Elementarpolygon

$$P_3(0,10) \equiv |\alpha_2, \alpha_6|, \ |\alpha_2, \alpha_6'|, \ |\alpha_1, \alpha_6'|, \ |\alpha_1, \alpha_5|, \ |\alpha_3', \alpha_5|,$$
$$|\alpha_3', \alpha_3|, \ |\alpha_4, \alpha_3|, \ |\alpha_4, \alpha_6'|, \ |\alpha_4, \alpha_6|, \ |\alpha_3' \ \alpha_6|.$$

Es mag noch eine hierher gehörige allen allgemeinen convexen Polyedern gemeinsame Eigenschaft hervorgehoben werden. Dieselbe wird ausgesprochen durch den Satz:

Theorem 22. *Auf jedem allgemeinen convexen Polyeder giebt es mindestens ein sich selbst nicht durchsetzendes Kantenpolygon der Charakteristik* 0.

Zufolge der am Eingange des Paragraphen dargelegten Möglichkeit, ein auf einem allgemeinen Polyeder gegebenes System ebener Grenzpolygone durch ein einfaches Kantenpolygon zu umschliefsen, ist der Beweis des Satzes erbracht, wenn auf jedem solchen Polyeder eine Gruppe von Grenzflächen nachgewiesen wird, wie etwa

$$\langle\alpha_1\rangle_{m_1}, \ \langle\alpha_2\rangle_{m_2}, \ \ldots, \ \langle\alpha_r\rangle_{m_r},$$

für welche die Anzahlen r und m_i der Relation genügen:

1) $$m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 6(r-1).$$

Gemäfs der in § 2 für die Anzahlen x_3, x_4 und x_5 der drei-, vier- und fünfseitigen Grenzpolygone eines allgemeinen Polyeders abgeleiteten Bedingung

2) $$3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqq 12$$

kommen aber unter dessen ebenen Grenzflächen allemal

1) entweder mindestens zwei Dreiecke,

2) oder mindestens drei Vierecke,

3) oder mindestens sechs Fünfecke,
4) oder mindestens
 a) ein Dreieck, ein Viereck und ein Fünfeck,
 b) ein Viereck und vier Fünfecke,
 c) ein Dreieck und drei Fünfecke,
 d) zwei Vierecke und zwei Fünfecke vor.

Die Substitution der jedem dieser sieben Flächensysteme entsprechenden Werte

$$m_1, m_2, \ldots, m_r, r$$

in die Bedingungsgleichung (1) zeigt nun, dafs dieselbe in allen sieben Fällen befriedigt wird, und sie beweist daher die Richtigkeit des aufgestellten Satzes.

Vierter Abschnitt.

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung und ihre geometrischen Constructionen.

§ 25. Formulierung der Aufgabe.

Nach den Definitionen und Ausführungen der §§ 11, 14 und 21 hat man folgende Einteilung der allgemeinen Polyeder:

1) Alle Polyeder, für welche der Ausdruck

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12$$

und folglich auch der Ausdruck

$$x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots$$

ein und denselben Wert m besitzt, konstituieren den Bereich B_m.

2) Alle Polyeder, welchen bezüglich der Bereichsgleichungen

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots$$

ein und dasselbe Lösungssystem entspricht, bilden einen zu dem Bereiche B_m gehörigen Stamm Σ_m.

3) Alle Polyeder, welche aus einem irreducibelen Polyeder des Stammes Σ_m, einem sogenannten Stammpolyeder, durch Elementarerweiterungen abgeleitet werden, bestimmen eine zu dem Stamme gehörige Familie.

An diese Einteilung knüpfen sich naturgemäfs die Fragen:

1) Welche positiven ganzen Zahlen m definieren einen Polyederbereich B_m?

2) Welche Lösungssysteme der Bereichsgleichungen

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots$$

bestimmen Polyederstämme Σ_m?

3) Welche Stammpolyeder bezw. Familien gehören zu einem Stamme Σ_m?

Die Beantwortung dieser drei Fragen bildet den Gegenstand der folgenden Paragraphen.

§ 26. Die Existenz des Polyederbereiches B_m.

Was die erste Frage anlangt, so giebt eine einfache Überlegung den gewünschten Aufschlufs. Man betrachte ein Polyeder des Bereiches B_0, etwa ein Tetragonhexaeder

$$A_6 \equiv \langle\alpha_1\rangle_4, \langle\alpha_2\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_4, \langle\alpha_4\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_4, \langle\alpha_6\rangle_4$$

mit den drei Gegenflächenpaaren

$$\langle\alpha_1\rangle_4, \langle\alpha_4\rangle_4; \ \langle\alpha_2\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_4; \ \langle\alpha_3\rangle_4, \langle\alpha_6\rangle_4,$$

und auf demselben ein Elementarpolygon, etwa

$$P \equiv |\alpha_5, \alpha_1|, |\alpha_6, \alpha_1|, |\alpha_6, \alpha_2|, |\alpha_4, \alpha_2|, |\alpha_4, \alpha_3|, |\alpha_5, \alpha_3|.$$

Zwischen die durch P getrennten Bestandteile

$$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle_4, \langle\alpha_2\rangle_4, \langle\alpha_3\rangle_4 \quad \text{und} \quad S_2 \equiv \langle\alpha_4\rangle_4, \langle\alpha_5\rangle_4, \langle\alpha_6\rangle_4$$

schalte man den Gürtel ein:

$$\begin{array}{l} \langle\alpha_4'\rangle_6, \ \langle\alpha_5'\rangle_6, \ \langle\alpha_6'\rangle_6, \\ \langle\alpha_1''\rangle_6, \ \langle\alpha_2''\rangle_6, \ \langle\alpha_3''\rangle_6, \\ \langle\alpha_4'''\rangle_6, \ \langle\alpha_5'''\rangle_6, \ \langle\alpha_6'''\rangle_6, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot, \\ \langle\alpha_{i_1}^{(m_1)}\rangle_6, \ \langle\alpha_{i_2}^{(m_1)}\rangle_6, \ \langle\alpha_{i_3}^{(m_1)}\rangle_6, \end{array}$$

$$m_1 \gtreqless 1 + \left[\frac{m}{2}\right],$$

wo sowohl die Flächen

$$\langle\alpha_k\rangle_4, \langle\alpha_k''\rangle_6, \langle\alpha_k^{(4)}\rangle_6, \ldots$$
$$(k = 1, 2, 3)$$

als auch die Flächen

$$\langle\alpha_l'\rangle_6,\ \langle\alpha_l'''\rangle_6,\ \langle\alpha_l^{(5)}\rangle_6,\ \ldots$$
$$(l = 4,\ 5,\ 6)$$

eine Reihe aufeinander folgender einfacher Scheitelflächen bestimmen. Kappt man hierauf von dem dadurch erhaltenen $(3_{m_1} + 6)$-flach A_n der Reihe nach die m Kanten

$$|\ \alpha_5', \alpha_1\ |,\ \ |\ \alpha_5', \alpha_6'\ |,\ \ |\ \alpha_5', \alpha_1''\ |,\ \ |\ \alpha_3'', \alpha_1''\ |,\ \ |\ \alpha_5''', \alpha_1''\ |, \ldots$$

mittelst ebensovieler ebener Schnitte

$$\langle\beta_1\rangle_4,\ \langle\beta_2\rangle_4,\ \langle\beta_3\rangle_4,\ \langle\beta_4\rangle_4,\ \langle\beta_5\rangle_4,\ \ldots,$$

so erhält man successive m Polyeder

$$A_{n+1},\ A_{n+2},\ \ldots,\ A_{n+m}$$

aus resp. den Bereichen

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_m.$$

Denn da von den Grenzflächen des Polyeders A_{n+h} infolge des Schnittes $\langle\beta_{h+1}\rangle_4$ nur ein Grenzvierseit, nämlich $\langle\beta_h\rangle_4$, in ein Grenzfünfseit $\langle\beta_h\rangle_5$, ein Scheitelsechseck von $\langle\beta_h\rangle_4$ aber in ein Siebeneck übergeht, während alle übrigen ihre Formen bewahren, so läfst jeder neue Schnitt $\langle\beta_{h+1}\rangle_4$ die Anzahl der Grenzdrei- und Grenzvierseite constant und vermehrt nur das System der Grenzfünfseite um eine Fläche $\langle\beta_h\rangle_5$. Demgemäfs gilt für das Polyeder A_{n+m}:

$$x_3 = 0,\quad x_4 = 6,\quad x_5 = m$$

und folglich, wie behauptet:

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m.$$

Man hat also den Satz:

Theorem 23. *Jeder positiven ganzen Zahl m, einschliefslich der Null, entspricht ein Bereich B_m allgemeiner Polyeder.*

§ 27. Die Polyederstämme des Bereiches B_0.

Die allgemeine Beantwortung der zweiten Frage macht zunächst ihre Erledigung in Bezug auf den Bereich B_0 wünschenswert. Die Polyeder dieses Bereiches sind an die Relationen gebunden:

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = 0,$$
$$x_7 = x_8 = x_9 = \cdots = 0,$$

und diese besitzen folgende in Frage kommende Lösungen:

$$\text{I. } x_3 = 4, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0,$$

$$\text{II. } x_3 = 3,\ x_4 = 1,\ x_5 = 1, \qquad \text{III. } x_3 = 3,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3,$$
$$\text{IV. } x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 0, \qquad \text{V. } x_3 = 2,\ x_4 = 2,\ x_5 = 2,$$
$$\text{VI. } x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 4, \qquad \text{VII. } x_3 = 2,\ x_4 = 0,\ x_5 = 6,$$
$$\text{VIII. } x_3 = 1,\ x_4 = 4,\ x_5 = 1, \qquad \text{IX. } x_3 = 1,\ x_4 = 3,\ x_5 = 3,$$
$$\text{X. } x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = 5, \qquad \text{XI. } x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 7,$$
$$\text{XII. } x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 9,$$
$$\text{XIII. } x_3 = 0,\ x_4 = 6,\ x_5 = 0, \qquad \text{XIV. } x_3 = 0,\ x_4 = 5,\ x_5 = 2,$$
$$\text{XV. } x_3 = 0,\ x_4 = 4,\ x_5 = 4, \qquad \text{XVI. } x_3 = 0,\ x_4 = 3,\ x_5 = 6,$$
$$\text{XVII. } x_3 = 0,\ x_4 = 2,\ x_5 = 8, \qquad \text{XVIII. } x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 10,$$
$$\text{XIX. } x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 12.$$

Diese 19 Lösungen sondern sich in drei Gruppen:

1) in Lösungen, welche schon an sich d. h. unter der Annahme $x_6 = 0$ ein oder mehrere Polyeder definieren,

2) in Lösungen, welche nur unter der Annahme $x_6 > 0$ zur Bestimmung eines Polyeders hinreichen,

3) in Lösungen, denen überhaupt kein Polyeder entspricht.

Um die den beiden ersten Gruppen zugehörigen Typen besser übersehen zu können, gewährt die nominelle Unterscheidung zweier besonders häufiger Polyederformen ein passendes Mittel.

Es soll ein $(n + 2)$-flach A_{n+2}, welches definiert wird durch die Beziehungen

$$\langle\alpha_1\rangle_n,\ \langle\alpha_2\rangle_n : |\ \langle\beta_1\rangle_4,\ \langle\beta_2\rangle_4,\ \cdots,\ \langle\beta_n\rangle_4$$

oder durch

$$\langle\alpha_1\rangle_n\rangle \overline{\overline{n}} \langle\langle\alpha_2\rangle_n$$

als ein n-kantiges einfaches Prisma Π_n',

ein $(2n + 2)$-flach A_{2n+2}, welches bestimmt wird durch die Beziehungen

$$\langle\alpha_1\rangle_n \begin{array}{l} | : \langle\beta_1\rangle_5, \langle\beta_2\rangle_5, \ldots, \langle\beta_n\rangle_5, \\ \rangle_{\overline{1}}\langle\langle\gamma_1\rangle_5, \langle\gamma_2\rangle_5, \ldots, \langle\gamma_n\rangle_5, \end{array}$$

$$\langle\alpha_2\rangle_n \begin{array}{l} | : \langle\gamma_1\rangle_5, \langle\gamma_2\rangle_5, \ldots, \langle\gamma_n\rangle_5, \\ \rangle_{\overline{1}}\langle\langle\beta_1\rangle_5, \langle\beta_2\rangle_5, \ldots, \langle\beta_n\rangle_5 \end{array}$$

als ein Prismatoid Π_n'' bezeichnet werden.

Durch die Lösungen der ersten Gruppe werden definiert:
durch I ein Tetraeder,
durch IV, XIII, XIV resp. die Prismen Π_3', Π_4', Π_5',
durch VII, XVII, XIX resp. die Prismatoide Π_3'', Π_4'', Π_5'',
durch V und IX ein 6-flach und ein 7-flach,

welche aus den Prismen Π_3' und Π_4' resp. durch das Kappen je einer Ecke entstehen,

durch XV und XVI ein 8-flach und ein 9-flach,

welche aus dem Prismatoide Π_4'' durch Ausscheidung seiner beiden bezw. nur des einen Grenzviereckes hervorgehen.

Im Gegensatze zu den vorstehenden elf Lösungen sind die übrigen acht an und für sich nicht konstruierbar.

Aus der Bemerkung, dafs ein Polyeder mit einem m-seitigen Grenzpolygone mindestens $m+1$ Seitenflächen zählt, folgt zunächst, dafs die Lösung II, nämlich

$$x_3 = 3, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 1$$

weder unter der Annahme $x_6 = 0$ noch unter der Annahme $x_6 = 1$ ein Polyeder definiert.

Ebensowenig kann die Lösung III, nämlich

$$x_3 = 3, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 3,$$

an und für sich ein allgemeines Polyeder bestimmen, da auf einem solchen eine Ecke

$$(\langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_3, \langle\alpha_3\rangle_5)$$

unmöglich ist.

Beide Lösungen werden erst dadurch konstruierbar, dafs man resp. $x_6 = 3$ und $x_6 = 1$ annimmt. Man erhält dann ein der Lösung III zugehöriges 7-flach aus einem Tetraeder

$$A_4 \equiv \langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_2\rangle_3, \langle\alpha_3\rangle_3, \langle\alpha_4\rangle_3$$

durch das Kappen dreier Ecken

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4), \quad (\alpha_1, \alpha_4, \alpha_2)$$

mittelst dreier Schnitte

$$\langle\alpha_7\rangle_3, \langle\alpha_5\rangle_3, \langle\alpha_6\rangle_3,$$

ein der Lösung II entsprechendes 8-flach aber aus dem 7-flach durch das Kappen einer Ecke

$$(\langle\alpha_i\rangle_5, \langle\alpha_k\rangle_3, \langle\alpha_l\rangle_5).$$

Eine directe Konstruction der Lösung

$$\text{VI)}\ x_3 = 2,\ x_4 = 1,\ x_5 = 4$$

verstöfst gegen die Konstruktionen zu I, IV und V. Dagegen erhält man unter der Annahme $x_6 = 1$ ein zugehöriges 8-flach, indem man von einem Tetragonhexaeder A_6 zwei Gegenecken

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ und } (\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6)$$

einer Fläche $\langle\alpha_1\rangle_4$ abschneidet.

Eine Konstruktion der Lösung

$$\text{VIII)}\ x_3 = 1,\ x_4 = 4,\ x_5 = 1$$

ist sowohl an sich als im Falle $x_6 = 1$ mit derjenigen der Lösung IV unvereinbar. Es wird eine solche erst mit der Annahme $x_6 = 2$ und zwar dadurch ausführbar, dafs von einem der Lösung IX entsprechenden 7-flach eine Ecke

$$(\langle\alpha_i\rangle_5, \langle\alpha_k\rangle_3, \langle\alpha_l\rangle_5)$$

abgeschnitten wird.

Mit Bezug auf die Lösung

$$\text{X)}\ x_3 = 1,\ x_4 = 2,\ x_5 = 5$$

erkennt man, dafs im Falle $x_6 = 0$ die Existenz einer Konstruktion durch die für die Lösungen IV, V, VII, IX gegebenen Darstellungen illusorisch gemacht wird. Nimmt man jedoch $x_6 = 1$ an, so kann aus dem zu III konstruierten 7-flach durch das Abschneiden einer Kante $(\langle\alpha_1\rangle_6, \langle\alpha_2\rangle_5)$ mittelst einer Fläche $\langle\alpha_8\rangle_4$ und durch das weitere Abschneiden der Kante $(\langle\alpha_1\rangle_6, \langle\alpha_8\rangle_4)$ mittelst eines Schnittes $\langle\alpha_9\rangle_4$ ein bezügliches 9-flach abgeleitet werden.

Eine Konstruktion der Lösung

$$\text{XI)}\ x_3 = 1,\ x_4 = 1,\ x_5 = 7$$

steht in dem Falle $x_6 = 0$ mit den Konstruktionen zu V und VII, im Falle $x_6 = 1$ mit gewissen leicht zu ermittelnden Konstruktionen der Lösungen

a) $x_3 = 2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2, \quad x_6 = 1,$

b) $x_3 = 2, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 1,$

c) $x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 8, \quad x_6 = 1,$

sowie mit der angegebenen Konstruktion der Lösung

d) $x_3 = 1, \quad x_4 = 5, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 1,$

als schliefslich auch mit der Konstruktion des Prismatoides Π_6'' im Widerspruch.

Wird aber $x_6 = 2$ vorausgesetzt, dann genügt es, von einem Prismatoid Π_4'' eine Ecke $(\langle\alpha_i\rangle_5, \langle\alpha_k\rangle_4, \langle\alpha_l\rangle_5)$ abzuschneiden, um ein Polyeder der verlangten Art zu erhalten.

Dafs die Lösung

$$\text{XII)} \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 9$$

für die Annahme $x_6 = 0$ kein Polyeder definiert, folgt aus der Konstruktion zu VII. Desgleichen sind einerseits im Falle $x_6 = 1$ schon durch das Sechseck, das Dreieck und sechs Fünfecke ein Zehnflach, andererseits im Falle $x_6 = 2$ entweder durch die beiden Sechsecke, das Dreieck und fünf Fünfecke je nach deren Zusammensetzung zwei allomorphe Zehnflache, oder durch die beiden Sechsecke, das Dreieck und vier Fünfecke ein Neunflach bestimmt. Im Falle $x_6 = 3$ findet man ein zugehöriges Polyeder durch das Kappen irgend einer Ecke eines Pentagondodekaeders Π_5''.

Eine Konstruktion der Lösung XVIII endlich,

$$\text{XVIII)} \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 1, \quad x_5 = 10,$$

streitet unter der Annahme $x_6 = 0$ wider die Konstruktion des Prismatoides Π_4'', unter der Annahme $x_6 = 1$ aber einerseits wider die Konstruktion des Prismatoides Π_6'', andererseits wider diejenige Konstruktion der Lösung

$$x_3 = 0, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 8, \quad x_6 = 1,$$

welche definiert wird durch die Beziehungen:

$$\langle\alpha_0\rangle_6 : \begin{matrix} |\langle\alpha_1\rangle_4, & |\langle\alpha_2\rangle_5, & |\langle\alpha_3\rangle_5, & |\langle\alpha_4\rangle_4, & |\langle\alpha_5\rangle_5, & |\langle\alpha_6\rangle_5, \\ \rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_7\rangle_5, & \rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_8\rangle_5, & \rangle_{\overline{2}}\langle\langle\alpha_9\rangle_5, & \rangle_{\overline{1}}\langle\langle\alpha_{10}\rangle_5. & & \end{matrix}$$

Für die Annahme $x_6 = 2$ kann ein zugehöriges Polyeder durch das Kappen irgend einer Kante eines Pentagondodekaeders erhalten werden.

Da nach vorstehenden Konstruktionen die beiden ersten Gruppen alle 19 Lösungen umfassen, kann man den Satz aussprechen:

Theorem 24. *Jedes positive ganzzahlige Lösungssystem der Gleichung*

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = 0$$

definiert einen Stamm allgemeiner Polyeder.

§ 28. Die Polyederstämme des Bereiches B_m.

Bei der Diskussion der Frage, welche den Bereichsgleichungen

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots + m \cdot x_{m+6}$$

genügende positive und ganzzahlige Wertesysteme

$$z_3, z_4, z_5, z_7, z_8, \ldots, z_{m+6}$$

Stämme allgemeiner Polyeder definieren, werden zweckmäfsig drei Arten von Lösungen unterschieden:

I. Lösungen der Form

$$z_3 = 0, \quad z_4 = 0, \quad z_5 = 12 + m, \quad z_7 \overline{\gtrless} 0, \quad z_8 \overline{\gtrless} 0, \ldots,$$

II. Lösungen der Form

$$z_3 = 0, \quad z_4 > 0, \quad z_5 \overline{\gtrless} 0, \quad z_7 \overline{\gtrless} 0, \quad z_8 \overline{\gtrless} 0, \ldots,$$

III. Lösungen der Form

$$z_3 > 0, \quad z_4 \overline{\gtrless} 0, \quad z_5 \overline{\gtrless} 0, \quad z_7 \overline{\gtrless} 0, \quad z_8 \overline{\gtrless} 0, \cdots.$$

In dem Falle einer Lösung erster Art

$$z_3 = 0, \; z_4 = 0, \; z_5 = 12 + m, \; z_7 \overline{\gtrless} 0, \; z_8 \overline{\gtrless} 0, \ldots, z_r > 0,$$
$$z_{r+1} = z_{r+2} = \cdots = z_{m+6} = 0$$

bilde man vermittelst der Hilfsgröfsen

$$m_1 = z_7 + z_8 + \cdots + z_r, \quad m_2 = z_8 + z_9 + \cdots + z_r, \ldots,$$
$$\ldots, m_{r-7} = z_{r-1} + z_r, \quad m_{r-6} = z_r$$

folgende Kette gleichartiger Lösungen:

1) $z_5' = 12 + m_1, \; z_7' = m_1, \; z_8' = z_9' = \cdots = z_r' = 0,$

2) $z_5'' = z_5' + m_2, \; z_7'' = z_7, \; z_8'' = m_2,$
$z_9'' = z_{10}'' = \cdots = z_r'' = 0,$

$$3)\quad z_5''' = z_5'' + m_3,\ z_7''' = z_7,\ z_8''' = z_8,\ z_9''' = m_3,$$
$$z_{10}''' = z_{11}''' = \cdots = z_r''' = 0,$$

. . . .,

$$r-7)\quad z_5^{(r-7)} = z_5^{(r-8)} + m_{r-7},\ z_7^{(r-7)} = z_7,\ z_8^{(r-7)} = z_8, \ldots$$
$$\ldots, z_{r-1}^{(r-7)} = m_{r-7},\ z_r^{(r-7)} = 0,$$
$$r-6)\quad z_5^{(r-6)} = z_5^{(r-7)} + m_{r-6},\ z_7^{(r-6)} = z_7,\ z_8^{(r-6)} = z_8, \ldots$$
$$\ldots, z_r^{(r-6)} = z_r.$$

Um alsdann ein der ersten Lösung entsprechendes Polyeder A_{n_1} zu bestimmen, gehe man aus von dem Pentagondodekaeder

$$\langle\alpha_1\rangle_5 \begin{array}{l} | : \langle\beta_1\rangle_5, \langle\beta_2\rangle_5, \langle\beta_3\rangle_5, \langle\beta_4\rangle_5, \langle\beta_5\rangle_5, \\ \succ_{\overline{1}} \langle\langle\gamma_1\rangle_5, \langle\gamma_2\rangle_5, \langle\gamma_3\rangle_5, \langle\gamma_4\rangle_5, \langle\gamma_5\rangle_5, \end{array}$$
$$\langle\alpha_2\rangle_5 \begin{array}{l} | : \langle\gamma_1\rangle_5, \langle\gamma_2\rangle_5, \langle\gamma_3\rangle_5, \langle\gamma_4\rangle_5, \langle\gamma_5\rangle_5, \\ \succ_{\overline{1}} \langle\langle\beta_1\rangle_5, \langle\beta_2\rangle_5, \langle\beta_3\rangle_5, \langle\beta_4\rangle_5, \langle\beta_5\rangle_5, \end{array}$$

wo je zwei gleich indicierte Flächen $\langle\beta_i\rangle_5$, $\langle\gamma_i\rangle_5$ Gegenflächen bezeichnen. Dasselbe besitzt in dem zehnkantigen Polygone

$$|\beta_1, \gamma_4|, |\gamma_4, \beta_2|, |\beta_2, \gamma_5|, |\gamma_5, \beta_3|, |\beta_3, \gamma_1|,$$
$$|\gamma_1, \beta_4|, |\beta_4, \gamma_2|, |\gamma_2, \beta_5|, |\beta_5, \gamma_3|, |\gamma_3, \beta_1|$$

ein Elementarpolygon $P_1(0, 10)$, dessen einziger irreducibeler Elementargürtel

$$G \equiv \langle\alpha_1'\rangle_6, \langle\alpha_2'\rangle_6, \langle\alpha_3'\rangle_6, \langle\alpha_4'\rangle_6, \langle\alpha_5'\rangle_6$$

durch die Bestimmung charakterisiert ist, dafs je zwei Flächen $\langle\alpha_{i-1}'\rangle_6$ und $\langle\alpha_{i+1}'\rangle_6$ durch gegenüberliegende Seiten der Fläche $\langle\alpha_i'\rangle_6$ gehen. Eine längs dieses Elementarpolygones $P_1(0, 10)$ erfolgende Einschaltung eines aus $1 + \left[\frac{m_1}{2}\right] = 1 + m'$ solchen Elementarstreifen bestehenden Gürtels wird das 12-flach Π_5'' in ein Polyeder A_n überführen:

$$\begin{array}{rl} A_{n'} \equiv \langle\alpha_1\rangle_5 \,|\, : & \langle\beta_1\rangle_5, \langle\beta_2\rangle_5, \langle\beta_3\rangle_5, \langle\beta_4\rangle_5, \langle\beta_5\rangle_5, \\ & \langle\alpha_1'\rangle_6, \langle\alpha_2'\rangle_6, \langle\alpha_3'\rangle_6, \langle\alpha_4'\rangle_6, \langle\alpha_5'\rangle_6, \\ & \langle\alpha_1''\rangle_6, \langle\alpha_2''\rangle_6, \langle\alpha_3''\rangle_6, \langle\alpha_4''\rangle_6, \langle\alpha_5''\rangle_6, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \langle\alpha_1^{(1+m')}\rangle_6, & \langle\alpha_2^{(1+m')}\rangle_6, \langle\alpha_3^{(1+m')}\rangle_6, \langle\alpha_4^{(1+m')}\rangle_6, \langle\alpha_5^{(1+m')}\rangle_6, \\ & \langle\gamma_1\rangle_5, \langle\gamma_2\rangle_5, \langle\gamma_3\rangle_5, \langle\gamma_4\rangle_5, \langle\gamma_5\rangle_5 : | \langle\alpha_2\rangle_5, \end{array}$$

in welchem gegenüberliegende Flächen benachbarter Elementarstreifen wiederum durch gleiche Indices gekennzeichnet sind.

Indem man nun aus m' der eingeschalteten Streifen drei aufeinander folgende Flächen herausgreift

$$\langle\alpha_{i-1}^{(h)}\rangle_6, \ \langle\alpha_i^{(h)}\rangle_6, \ \langle\alpha_{i+1}^{(h)}\rangle_6,$$
$$h = 1, 2, \ldots, m',$$

und entsprechend diesen Tripeln an $A_{n'}$ die m' Operationen ausführt

$$\langle\delta_h\rangle_5 \triangleq |\,\alpha_i^{(h)}, \ \alpha_{i_1}^{(h+1)}\,|, \quad |\,\alpha_i^{(h)}, \ \alpha_{i_2}^{(h+1)}\,|,$$

und so die $2m'$ Sechsecke

$$\langle\alpha_{i-1}^{(h)}\rangle_6 \quad \text{und} \quad \langle\alpha_{i+1}^{(h)}\rangle_6$$
$$h = 1, 2, \ldots, m'$$

in resp. die Siebenecke verwandelt

$$\langle\beta'_{2h-1}\rangle_7 \quad \text{und} \quad \langle\beta'_{2h}\rangle_7,$$

die m' Sechsecke

$$\langle\alpha_i^{(h)}\rangle_6$$

aber durch je zwei einander seitende Fünfecke ersetzt

$$\langle\gamma'_{2h-1}\rangle_5 \quad \text{und} \quad \langle\gamma'_{2h}\rangle_5,$$

führt man dadurch das Polyeder $A_{n'}$, falls m_1 eine gerade Zahl ist, direkt, im Falle aber m_1 eine ungerade Zahl ist, durch einen hinzutretenden $(m'+1)^{\text{ten}}$ Schnitt

$$\langle\delta'\rangle_5 \triangleq |\,\gamma_1, \ \alpha_3^{(1+m')}\,|, \quad |\,\alpha_3^{(1+m')}, \ \alpha_4^{(1+m')}\,|,$$

welcher ein nicht zu dem transformierten Flächentripel des m'^{ten} Streifens gehöriges Sechseck $\langle\alpha_1^{(m')}\rangle_6$ in ein Siebeneck verwandelt, in ein der ersten Lösung entsprechendes Polyeder A_{n_1} über.

Ein an diesem Körper vollzogener Erweiterungsprozefs Π_2 läfst die m_1 gemeinsamen Kanten

$$|\,\beta_1', \gamma_1'\,|, \quad |\,\beta_2', \gamma_2'\,|, \ldots, |\,\beta'_{m_1}, \gamma'_{m_1}\,|$$

der m_1 Flächenpaare

$$\langle\beta_1'\rangle_7, \ \langle\gamma_1'\rangle_5; \ \langle\beta_2'\rangle_7, \ \langle\gamma_2'\rangle_5; \ \ldots; \ \langle\beta'_{m_1}\rangle_7, \ \langle\gamma'_{m_1}\rangle_5$$

in je zwei Gegenseiten

$$|\,\varphi_i', \ \beta_i'\,| \quad \text{und} \quad |\,\varphi_i', \ \gamma_i'\,|$$

eines Einschaltungssechseckes $\langle\varphi_i'\rangle_6$ übergehen. Dadurch, daſs man auf dem neuentstandenen Polyeder

$$A_{n''} \equiv \Pi_2(A_{n_1})$$

nur noch die m_2 Flächentripel ins Auge faſst

$$\langle\beta'_{z_7+h}\rangle_7, \quad \langle\varphi'_{z_7+h}\rangle_6, \quad \langle\gamma'_{z_7+h}\rangle_5,$$
$$h = 1, 2, \ldots, m_2,$$

und in Bezug auf dieselben wieder die Operationen ausführt

$$\langle\delta_h''\rangle_5 \triangleq |\,\varphi'_{z_7+h},\ \psi_1\,|, \quad |\,\varphi'_{z_7+h},\ \psi_2\,|,$$

wo die Kanten $|\,\varphi'_{z_7+h},\ \psi_1\,|$ und $|\,\varphi'_{z_7+h},\ \psi_2\,|$ durch eine Ecke $(\psi_1,\ \varphi'_{z_7+h},\ \psi_2)$ gehen, wird man die m_2 Siebenecke

$$\langle\beta'_{z_7+1}\rangle_7, \langle\beta'_{z_7+2}\rangle_7, \ldots, \langle\beta'_{m_1}\rangle_7$$

in ebensoviele Achtecke

$$\langle\beta_1''\rangle_8, \langle\beta_2''\rangle_8, \ldots, \langle\beta''_{m_2}\rangle_8,$$

die m_2 Fünfecke

$$\langle\gamma'_{z_7+1}\rangle_5, \langle\gamma'_{z_7+2}\rangle_5, \ldots, \langle\gamma'_{m_1}\rangle_5$$

in ebensoviele Sechsecke verwandeln, während die m_2 Sechsecke

$$\langle\varphi'_{z_7+h}\rangle_6$$

durch je ein Paar einander und das Achteck

$$\langle\beta_h''\rangle_8$$

seitender Fünfecke

$$\langle\varphi'_{z_7+h}\rangle_5 \quad \text{und} \quad \langle\gamma_h''\rangle_5$$

ersetzt werden.

Weil aber hiernach für das resultierende Polyeder A_{n_2} die Anzahlen der Fünf-, Sieben- und Achtecke gegeben werden durch resp.

$$z_5'' = 12 + m_1 + m_2, \quad z_7'' = z_7, \quad z_8'' = m_2,$$

so repräsentiert dasselbe ein Polyeder der zweiten Lösung.

Die Anwendung des Prozesses Π_2 auf dieses neue Polyeder läſst die m_2 gemeinsamen Kanten

$$|\,\beta_1'',\ \gamma_1''\,|, \quad |\,\beta_2'',\ \gamma_2''\,|, \ldots, |\,\beta''_{m_2},\ \gamma''_{m_2}\,|$$

der m_2 Flächenpaare

$$\langle\beta_1''\rangle_8, \langle\gamma_1''\rangle_5;\ \langle\beta_2''\rangle_8, \langle\gamma_2''\rangle_5;\ \ldots;\ \langle\beta''_{m_2}\rangle_8, \langle\gamma''_{m_2}\rangle_5$$

in je zwei Gegenkanten

$$|\ \varphi_h'', \beta_h''\ | \text{ und } |\ \varphi_h'', \gamma_h''\ |$$

einer Einschaltungsfläche

$$\langle \varphi_h''' \rangle_6,$$

das Polyeder A_{n_2} in ein Polyeder $A_{n'''}$ übergehen. Vollzieht man darauf an den m_3 Flächensystemen

$$\langle \beta''_{z_8+h} \rangle_8,\ \langle \varphi''_{z_8+h} \rangle_6,\ \langle \gamma''_{z_8+h} \rangle_5,$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m_3)$$

wiederum die Operationen

$$\langle \delta_h''' \rangle_5 \triangle\ |\ \varphi''_{z_8+h}, \chi_1\ |,\ |\ \varphi''_{z_8+h}, \chi_2\ |$$

und verwandelt dadurch die m_3 Achtecke

$$\langle \beta''_{z_8+1} \rangle_8, \ldots, \langle \beta''_{z_8+m_3} \rangle_8$$

resp. in die Neunecke

$$\langle \beta_1''' \rangle_9, \ldots, \langle \beta'''_{m_3} \rangle_9,$$

die m_3 Fünfecke

$$\langle \gamma''_{z_8+1} \rangle_5, \ldots, \langle \gamma''_{z_8+m_3} \rangle_5$$

in ebensoviele Sechsecke, während für die m_3 Sechsecke

$$\langle \varphi''_{z_8+h} \rangle_6$$

m_3 Paare einander und je ein Neuneck

$$\langle \beta_h''' \rangle_9$$

seitender Fünfecke treten,

$$\langle \varphi''_{z_8+h} \rangle_5,\ \langle \gamma'''_{2h} \rangle_5,$$

so belaufen sich die Anzahlen der Fünf-, Sieben-, Acht- und Neunecke des hervorgehenden Polyeders A_{n_3} auf resp.

$$z_5''' = 12 + m_1 + m_2 + m_3,\quad z_7''' = z_7,\quad z_8'' = z_8,\quad z_9''' = m_3.$$

Demnach entspricht dieses Polyeder der dritten Lösung.

Es liegt auf der Hand, in welcher Weise das eingeschlagene Verfahren fortzusetzen und wie mittelst desselben successive Polyeder jeder folgenden bis zur $r - 6^{\text{ten}}$ Lösung zu construieren sind.

Man gelangt somit zu dem Satze:

Jede positive und ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x_5 - 12 = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots$$

definiert mindestens einen Polyederstamm.

Es werde jetzt eine Lösung des Typus II betrachtet, nämlich:

II$_1$) $\quad z_3 = 0,\ \ z_4 > 0,\ \ z_5 > 0,\ \ z_7 \gtreqless 0, \ldots, z_r > 0.$

Man setze zunächst

$$2z_4 + z_5 = \bar{z}_5$$

und construiere mit Hilfe der eben entwickelten Methode ein Polyeder A_n der Lösung

II$_2$) $\quad \bar{z}_5 = 12 + m,\ \ z_7 \gtreqless 0,\ \ z_8 \gtreqless 0,\ \ z_r > 0.$

Um alsdann aus einem solchen Polyeder eines der gegebenen Lösung II$_1$) abzuleiten, sind einige Hilfsbetrachtungen erforderlich.

Unterwirft man ein beliebiges Polyeder A_n a-mal nach einander dem Prozesse Π_2, bildet man also den Körper

$$\Pi_2(\Pi_2(\cdots(\Pi_2(A_n))\cdots)) = \Pi_2^{(a)}(A_n),$$

so wird der unmittelbare Zusammenhang zweier Seitenflächen

1) $\alpha_1 \quad \alpha_2$

durch den mittelbaren ersetzt:

2) $\alpha_1 \ \varphi_1 \ \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_{\mu-1} \ \varphi_\mu \ \alpha_2,$

wo die Anzahl μ der Zwischensechsecke bestimmt ist durch

$$\mu = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{a-1} = 2^a - 1.$$

Die darauf erfolgende Anwendung des Prozesses Π_1 d. h. die Bildung des Polyeders $\Pi_1(\Pi_2^{(a)}(A_n))$ verwandelt zwei unmittelbare Seitenflächen in zwei unmittelbare Scheitelflächen und läßt demgemäß das Flächensystem (2) übergehen in das andere

3) $\alpha_1 \ \varphi_1' \ \varphi_1'' \ \varphi_1 \ \varphi_2' \ \varphi_2'' \ \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_{\mu-1} \ \varphi_\mu' \ \varphi_\mu'' \ \varphi_\mu \ \varphi_{\mu+1}' \ \varphi_{\mu+1}'' \ \alpha_2.$

Zufolge der weiteren Operationen

$$\langle \delta_h \rangle_4 = | \varphi_h', \varphi_h'' |$$
$$(h = 1, 2, \ldots, \mu + 1)$$

resultiert die Verbindung

4) $\alpha_1 \ \delta_1 \ \varphi_1 \ \delta_2 \ \varphi_2 \cdots\cdots \varphi_{\mu-1} \ \delta_\mu \ \varphi_\mu \ \delta_{\mu+1} \ \alpha_2.$

Indem man schliefslich von jeder Fläche $\langle\varphi_h\rangle_8$ mittelst eines sechsseitigen Schnittes $\langle\psi_h\rangle_6$ die drei Kanten abschneidet

$$|\,\varphi_h,\ \varphi_h'\,|,\quad |\,\varphi_h,\ \chi_h\,|,\quad |\,\varphi_h,\ \varphi_{h+1}'\,|,$$

erhält man das Flächensystem

5) α_1 δ_1 ψ_1 φ_1 δ_2 ψ_2 φ_2 δ_3 ...... $\delta_{\mu-1}$ $\psi_{\mu-1}$ $\varphi_{\mu-1}$ δ_μ ψ_μ φ_μ $\delta_{\mu+1}$ α_2.

Wenn nun die ursprünglich gegebenen zwei Flächen $\langle\alpha_1\rangle$ und $\langle\alpha_2\rangle$ Grenzfünfseite darstellen, so kann das vorstehende Konstruktionsverfahren, welches von der Verbindung (3) zu der gleichartigen Verbindung (5) führt, als ein Reduktionsverfahren aufgefafst werden. — Denn ganz ebenso wie (3) mittelst $1+\mu$ vierseitiger und μ sechsseitiger Schnitte auf (5) zurückgeführt worden, kann (5) mittelst μ vierseitiger und $\mu-1$ sechsseitiger Hilfsschnitte auf eine analoge Reihe benachbarter Scheitelflächen mit nur noch $\mu-2$ Zwischensechsecken, diese vermöge $\mu-1$ vierseitiger und $\mu-2$ sechsseitiger Hilfsschnitte auf eine entsprechende Verbindung mit nur noch $\mu-3$ Zwischensechsecken und so fort reduciert werden. Man wird daher schliefslich an die Stelle des ursprünglich zwischen den Fünfecken $\langle\alpha_1\rangle_5$ und $\langle\alpha_2\rangle_5$ bestehenden Zusammenhanges (2) vermittelst Anwendung des Erweiterungsprozesses Π_1 und nach Ausführung einer gewissen Reihe von F.-Operationen ein System von Grenzsechsecken und ein Grenzviereck setzen.

Dieses Ergebnis gestattet mit Bezug auf die eigentliche Aufgabe der Konstruktion einer Lösung der Gleichungen

$$2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + \cdots + m \cdot x_{m+6}$$

deren vollständige Erledigung.

Da nämlich bei der zunächst auszuführenden Konstruktion eines der Lösung

$$\bar{z}_5,\ z_7,\ z_8,\ \ldots,\ z_r$$

entsprechenden Polyeders A_{n_r-6} aus einem Pentagondodekaeder Π_5'' nach der oben entwickelten Methode

$$\bar{z}_5 - 12 \text{ bezw. } 2\left[\frac{z_5}{2}\right] - 10$$

Grenzfünfecke des Endpolyeders paarweise, und zwar als unmittelbare Seitenflächen, eingeführt werden, und die Grenzfünf-

ecke des ursprünglichen Pentagondodekaeders gleichfalls sechs Seitenflächenpaare bestimmen, dieser Zusammenhang aber nur durch den Prozeſs Π_2 verändert wird, so können zufolge der angestellten Hilfsbetrachtungen schlieſslich beliebige z_4 Paare aller $\bar{z}_5$ Grenzfünfecke ohne Änderung der Anzahlen der $(6+h)$-seitigen Grenzflächen durch ebensoviele Grenzvierseite ersetzt werden. Dadurch aber geht das Polyeder A_{n_r-6} in ein der Lösung II entsprechendes Polyeder über.

Also:

Jede positive und ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + \cdots + m \cdot x_{m+6}$$

definiert mindestens einen Polyederstamm.

Handelt es sich endlich um die Darstellung einer Lösung

III) $z_3 > 0,\ z_4 \gtreqless 0,\ z_5 \gtreqless 0,\ z_p > 0,\ z_q > 0, \ldots, z_r > 0,$

so führe man an dem aus dem Pentagondodekaeder Π_5'' abgeleiteten Polyeder $A_{n'}$ successive folgende Konstruktionen aus:

$$\langle\delta_1'\rangle_5 \mathrel{\hat{=}} |\,\alpha_1',\ \alpha_3''\,|,\quad |\,\alpha_1',\ \alpha_4''\,|,\quad \langle\delta_2'\rangle_3 \mathrel{\dot{-}} (\alpha_5',\ \delta_1',\ \alpha_1'),$$
$$\langle\delta_3'\rangle_5 \mathrel{\hat{=}} |\,\alpha_1',\ \delta_1'\,|,\quad |\,\alpha_1',\ \delta_2'\,|,\quad \langle\delta_4'\rangle_3 \mathrel{\dot{-}} (\alpha_5',\ \delta_3',\ \alpha_1'),$$
$$\langle\delta_5'\rangle_5 \mathrel{\hat{=}} |\,\alpha_1',\ \delta_3'\,|,\quad |\,\alpha_1',\ \delta_4'\,|,\quad \langle\delta_6'\rangle_3 \mathrel{\dot{-}} (\alpha_5',\ \delta_5',\ \alpha_1'),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

a) bei geradem p:

$$\langle\delta_{p-7}'\rangle_5 \mathrel{\hat{=}} |\,\alpha_1',\ \delta_{p-9}'\,|,\quad |\,\alpha_1',\ \delta_{p-8}'\,|,\ \langle\delta_{p-6}'\rangle_3 \mathrel{\dot{-}} (\alpha_5',\ \dot{\delta}_{p-7}',\ \alpha_1'),$$

b) bei ungeradem p:

$$\langle\delta_{p-6}'\rangle_5 \mathrel{\hat{=}} |\,\alpha_1',\ \delta_{p-8}'\,|,\quad |\,\alpha_1',\ \delta_{p-7}'\,|,\ \langle\delta_{p-5}'\rangle_3 \mathrel{\dot{-}} (\alpha_1',\ \delta_{p-6}',\ \alpha_2').$$

Für das resultierende Polyeder A_{n_1} hat man

a) $\qquad z_3' = \frac{1}{2}(p-6), \quad z_5' = 12, \quad z_p = 1, \quad z_{p'}' = 1$

$$(p' = \tfrac{1}{2}(p+6));$$

b) $\qquad z_3' = \frac{1}{2}(p-5), \quad z_5' = 12, \quad z_p' = 1, \quad z_{p'}' = 1$

$$(p' = \tfrac{1}{2}(p+9)).$$

Unter der Voraussetzung $p \gtreqless 8, 9$ gilt daher:

$$\text{a)}\ \ p' \leq p-1, \qquad \text{b)}\ \ p' \lesseqgtr p.$$

Im ersten Falle unterwerfe man A_{n_1} wieder dem Prozesse Π_2 und führe die durch zwei Gegenseiten des Einschaltungssecksecks

gehenden Flächen

$$\langle\varphi_1'\rangle_6$$

$$\langle\alpha_2'\rangle_{p'} \quad \text{und} \quad \langle\alpha_1'\rangle_6$$

vermittelst der Constructionen

$$\langle\delta_1''\rangle_5 \triangleq |\,\varphi_1',\ \varphi_2'\,|,\ \ |\,\varphi_1',\ \varphi_3'\,|, \qquad \langle\delta_2''\rangle_3 \doteq (\varphi_1',\ \delta_1'',\ \alpha_2'),$$
$$\langle\delta_3''\rangle_5 \triangleq |\,\varphi_1',\ \delta_1''\,|,\ \ |\,\varphi_1',\ \delta_2''\,|, \qquad \langle\delta_4''\rangle_3 \doteq (\varphi_1',\ \delta_4'',\ \alpha_2'),$$

. . . .

resp. in die Flächen über:

$$\langle\alpha_2'\rangle_p \quad \text{und} \quad \langle\alpha_1'\rangle_{p''}$$
$$(p'' \leqq p).$$

Nach abermaliger Anwendung des Prozesses Π_2 verwandle man,

a) wenn $p'' < p$ ist, das Flächensystem

$$\langle\alpha_1\rangle p'' \quad \varphi_1'' \quad \varphi_1'$$

in das andere

$$\langle\alpha_1'\rangle p \quad \varphi_1'' \quad \langle\varphi_1'\rangle p^{(3)},$$

b) wenn $p'' = p$ ist, irgend ein Flächensystem

$$\beta_1' \quad \beta_2' \quad \beta_3'$$

in ein Flächensystem

$$\langle\beta_1\rangle p \quad \beta_2' \quad \langle\beta_3'\rangle p'.$$

Dieses Verfahren hat man je nach den beiden Möglichkeiten

$$3z_3 \leqq (p-6)\cdot z_p \quad \text{oder} \quad 3z_3 > (p-6)\cdot z_p$$

so lange fortzusetzen, bis entweder die Anzahl der Grenzdreiseite

$$\langle\delta_2'\rangle_3,\ \langle\delta_4'\rangle_3,\ \cdots,\ \langle\delta_2''\rangle_3,\ \langle\delta_4''\rangle_3,\ \cdots$$

die vorgeschriebene Zahl z_3 erreicht hat, oder bis die Anzahl der Grenz-p-seite

$$\langle\alpha_5'\rangle_p,\ \langle\alpha_2'\rangle_p,\ \langle\alpha_1'\rangle_p,\ \langle\varphi'\rangle_p,\ \langle\varphi_1''\rangle_p,\ \cdots$$

auf z_p gewachsen ist.

Im ersten Falle resultiert ein Polyeder der Lösung

$$z_3,\ z_5'' = 12,\ z_{p'} = 0, 1,\ 0 < z_p'' \leqq z_p,$$

aus welchem vermöge der für die Konstructionen der Lösungen I und II mafsgebenden Methoden leicht ein der gegebenen Lösung III entsprechendes Polyeder abgeleitet wird.

Im zweiten Falle vollziehe man an dem die Lösung

$$0 < z_3'' < z_3,\ z_5'' = 12,\ z_{p'} = 0, 1,\ z_p$$

repräsentierenden Polyeder den Prozefs Π_2 und verwandle in bekannter Weise,

a) falls $z_{p'} = 1$ ist, das Flächensystem

$$\langle\varphi\rangle p' \quad \psi_1' \quad \psi_1$$

in das andere

$$\langle\varphi\rangle\varphi \quad \psi_1' \quad \langle\psi_1\rangle\varphi',$$

b) wenn $z_{p'} = 0$ ist, ein Flächensystem

$$\beta_1'' \quad \beta_2'' \quad \beta_3''$$

in ein Flächensystem

$$\langle\beta_1''\rangle\varphi \quad \beta_2'' \quad \langle\beta_3''\rangle\varphi'.$$

Es leuchtet ein, wie eine zweckmäfsige Fortsetzung dieses Konstruktionsverfahrens entweder zu z_3 Grenzdreiecken $\langle\delta_{h'2i}\rangle_3$ oder zu z_q Grenz-q-ecken führt, und wie man im ersten Falle zu einem Polyeder der Lösung

$$z_3,\ z_5''' = 12,\ z_p,\ z_{q'} = 0, 1,\ 0 < z_q''' < z_q,$$

im zweiten Falle zu einem Polyeder der anderen gelangt,

$$0 < z_3''' < z_3,\ z_5''' = 12,\ z_p,\ z_{q'} = 0, 1,\ z_q.$$

Bei entsprechender Behandlung des resultierenden und aller folgenden aus ihm abzuleitenden Polyeder erhält man unter der Voraussetzung $\bar{z}_5 > 12$ schliefslich ein Polyeder der Lösung

$$z_3,\ \bar{z}_5 = 2z_4 + z_5,\ z_p,\ z_q, \ldots, z_r,$$

aus welchem dann durch weitere Anwendung der unter II gegebenen Methoden leicht ein die ursprüngliche Lösung

$$z_3, z_4, z_5, z_p, z_q, \ldots, z_r$$

darstellendes Polyeder bestimmt wird.

Das vorbeschriebene Konstruktionsverfahren bleibt auch noch in Kraft, wenn die Gröfse $2z_4 + z_5$ genau den Wert 12 hat. Man wird nämlich im Verlaufe der Konstruktion entweder zu einem Polyeder der Lösung

1) $$z_3' < z_3, \bar{z}_5 = 12, z_p, z_q, \ldots, z_r' = z_r - 2$$

oder zu einem Polyeder der anderen gelangen

2) $$z_3' < z_3, \bar{z}_5 = 12, z_p, z_q, \ldots, z_{r_1} = 1, z_r' = z_r - 2.$$

Im ersten Falle führe man gemäfs der dann geltenden Beziehung

$$3(z_3 - z_3') = 2(r - 6)$$

und der daraus folgenden

$$r = 3\varrho$$

an einer aus einem Sechseck $\langle\varphi\rangle_6$ und vier aufeinander folgenden Seitenflächen desselben

$$\langle\varphi_1\rangle_6, \langle\psi_1\rangle_6, \langle\psi_2\rangle_6, \langle\varphi_2\rangle_6$$

bestehenden Fläche nach einander die Operationen aus:

$$\begin{aligned}
&\langle\delta_1\rangle_5 \triangleq |\varphi, \psi_1|, |\varphi, \psi_2|, \quad \langle\delta_2\rangle_3 \doteq (\varphi_1, \varphi, \delta_1),\\
&\langle\delta_3\rangle_5 \triangleq |\varphi, \delta_1|, |\varphi, \delta_2|, \quad \langle\delta_4\rangle_3 \doteq (\varphi_2, \varphi, \delta_3),\\
&\langle\delta_5\rangle_5 \triangleq |\varphi, \delta_3|, |\varphi, \delta_4|, \quad \langle\delta_6\rangle_3 \doteq (\varphi_1, \varphi, \delta_5),\\
&\langle\delta_7\rangle_5 \triangleq |\varphi, \delta_5|, |\varphi, \delta_6|, \quad \langle\delta_8\rangle_3 \doteq (\varphi_2, \varphi, \delta_7),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

bis man nach $4\varrho - 8$ Schnitten die beiden Sechsecke $\langle\varphi_1\rangle_6$ und $\langle\varphi_2\rangle_6$ in zwei r-Ecke und dadurch das der Lösung (1) entsprechende Polyeder in ein gesuchtes umgewandelt hat.

Das eben benutzte Princip wird auch in dem Falle eines Polyeders der zweiten oben vorgesehenen Lösung zum Ziele führen, vorausgesetzt, dass die Seitenanzahl r_1 des einen Grenzpolygones $\langle\alpha_i\rangle_{r_1}$ kleiner oder höchstens gleich der Zahl $\left[\frac{r+6}{2}\right]$ ist.

Denn da alsdann die Beziehung besteht

$$3(z_3 - z_3') = 2r - (r_1 + 6),$$

so kann man von den $z_3 - z_3'$ im Ganzen auszuführenden Schnitten $\langle\delta_{2h}\rangle_3$

a) $$\frac{z_3 - z_3' - (r_1 - 6)}{2} = \frac{r - 2(r_1 - 3)}{3}$$

an dem Polygone $\langle\alpha_i\rangle_{r_1}$,

b) $$\frac{z_3 - z_3' + r_1 - 6}{2} = \frac{r + r_1 - 12}{3}$$

an dem Polygone $\langle\varphi_2\rangle_6$ vollziehen und auf diese Weise die durch gegenüberliegende Seiten eines Sechseckes gehenden Flächen $\langle\alpha_i\rangle_{r_1}$ und $\langle\varphi_1\rangle_6$ in zwei r-Ecke umformen.

Besagte Voraussetzung kann aber im Allgemeinen als erfüllt angesehen werden. — Denn ist man in den Konstruktionen bis zu einem Polyeder A_ν der Lösung vorgeschritten

$$z_3' < z_3, \bar{z}_5 = 12, z_p, z_q, \ldots, z_{r'} = 1, z_r' = z_r - 3,$$

so kann man die durch gegenüberliegende Seiten des Sechseckes $\langle\varphi_0\rangle_6$ gehenden Flächen

$$\langle\varphi_1\rangle_{r'} \quad \text{und} \quad \langle\varphi_2\rangle_6$$

durch die Operationen

$$\langle\delta_1\rangle_5 \triangle |\varphi_0, \varphi_1|, |\varphi_0, \varphi_2|, \langle\delta_2\rangle_3 \doteq (\varphi_1, \varphi_0, \delta_1),$$
$$\langle\delta_3\rangle_5 \triangle |\varphi_0, \delta_1|, |\varphi_0, \delta_2|, \langle\delta_4\rangle_3 \doteq (\varphi_1, \varphi_0, \delta_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

in zwei Flächen

$$\langle\varphi_1\rangle_r \quad \text{und} \quad \langle\varphi_2\rangle_{r_1}$$

überführen, für deren zweite sich die Anzahl r_1 ihrer Seiten, den Fällen einer geraden oder ungeraden Differenz $r - r'$ entsprechend, durch die Formeln berechnet:

$$\text{a)} \quad r_1 = 6 + \frac{r - r'}{2}, \qquad \text{b)} \quad r_1 = 7 + \left[\frac{r - r' + 1}{2}\right].$$

Von diesen beiden Anzahlen genügt aber die erste allemal, und die zweite für alle Werte $r' \gtreqless 9$ der notwendigen Bedingung

$$r_1 \leq \left[\frac{r + 6}{2}\right].$$

Ist dagegen im Falle $z_r' = z_r - 3$ gleichzeitig $z_{r'} = 0$, so betrachte man an dem Polyeder A_ν bezw. an dem abgeleiteten $\Pi_2(\Pi_2(A_\nu))$ drei in einer Ecke zusammenstofsende Sechsecke

$$\langle\varphi_1\rangle_6, \langle\varphi_2\rangle_6, \langle\varphi_3\rangle_6$$

und ihre durch die drei Nachbarecken gehenden Scheitelflächen

$$\langle\psi_1\rangle_6, \langle\psi_2\rangle_6, \langle\psi_3\rangle_6.$$

Man kann dann in bekannter Weise bei zweckmäfsiger Verteilung der dreiseitigen Schnitte zunächst das Flächensystem

$$\langle\psi_1\rangle_6, \langle\varphi_3\rangle_6, \langle\psi_2\rangle_6$$

ein Flächensystem

$$\langle\psi_1\rangle_{r_1}, \langle\varphi_3\rangle_6, \langle\psi_2\rangle_{r_2}$$

mit der Bestimmung $r_1 \leqq \left[\frac{r+6}{2}\right] < r_2$ überführen, darauf das andere System

$$\langle\psi_2\rangle_{r_2}, \langle\varphi_1\rangle_6, \langle\psi_3\rangle_6$$

in ein Flächensystem

$$\langle\psi_2\rangle_r, \langle\varphi_1\rangle_6, \langle\psi_3\rangle_{r_3}$$

mit der Bestimmung $r_3 \leqq \left[\frac{r+6}{2}\right]$ umformen, schliefslich aus dem dritten Systeme

$$\langle\psi_1\rangle_r, \langle\varphi_2\rangle_6, \langle\psi_3\rangle_{r_3}$$

ein System ableiten

$$\langle\psi_1\rangle_r, \langle\varphi_2\rangle_6, \langle\psi_3\rangle_r,$$

indem man nämlich von den im letzten Falle anzuwendenden $\frac{1}{3}(2r - r_1 - r_3)$ dreiseitigen Schnitten $\frac{1}{3}(r + r_3 - 2r_1)$ an der Fläche $\langle\psi_1\rangle_{r_1}$ und $\frac{1}{3}(r + r_1 - 2r_3)$ an der Fläche $\langle\psi_3\rangle_{r_3}$ ausführt.

Den vorstehenden Betrachtungen liegt die Annahme zu Grunde

$$z_7 = 0.$$

Ist dieselbe nicht erfüllt, so machen die beiden möglichen Fälle

$$1)\ 3z_3 \leqq z_7 \quad \text{und} \quad 2)\ 3z_3 > z_7$$

eine getrennte Behandlung erforderlich.

Im ersten Falle genügt es, an dem Polyeder $A_{n'}$ die Operationen zu vollziehen,

$$\langle\delta_1\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1', \alpha_3'', \alpha_4''), \quad \langle\delta_2\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1''', \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)}),$$
$$\langle\delta_3\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1^{(5)}, \alpha_3^{(6)}, \alpha_4^{(6)}), \ldots, \langle\delta_{z_3}\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1^{(2z_3-1)}, \alpha_3^{(2z_3)}, \alpha_4^{(2z_3)}),$$

um das Problem auf das vorher behandelte zurückzuführen.

Im zweiten Falle schreibe man

$$z_7 = 3\left[\frac{z_7}{3}\right] + \varrho_7 = 3\mu + \varrho_7$$

und führe entsprechend den drei unterschiedlichen Vorkommnissen

$$\varrho_7 = 0,\ 1,\ 2$$

an $A_{n'}$ vor allem die Konstruktionen aus:

a) $\langle\delta_1\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1', \alpha_3'', \alpha_4''), \quad \langle\delta_2\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1''', \alpha_3^{(4)}, \alpha_4^{(4)}),$

$\langle\delta_3\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1^{(5)}, \alpha_3^{(6)}, \alpha_4^{(6)}), \ldots, \langle\delta_\mu\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_1^{(2\mu-1)}, \alpha_3^{(2\mu)}, \alpha_4^{(2\mu)}),$

b) aufser den vorigen noch die Konstruktion:

$$\langle\delta'\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\gamma_3, \alpha_1^{(\nu)}, \gamma_4),$$

c) entweder aufser den Konstruktionen a) und b) noch die Konstruktion:

$$\langle\delta''\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\gamma_5, \alpha_3^{(\nu)}, \gamma_1),$$

oder aufser den Konstruktionen a) noch die Konstruktion:

$$\langle\delta''\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\alpha_3^{(\nu)}, \gamma_1, \alpha_4^{(\nu)}).$$

Man erhält auf diese Weise ein Polyeder A_{n_1} der Lösung

a) $\quad z_3' = \frac{z_7}{3}, \quad z_5' = 12, \quad z_7' = z_7;$

b) $\quad z_3' = \left[\frac{z_7}{3}\right] + 1, \quad z_5' = 10, \quad z_7' = z_7;$

c₁) $\quad z_3' = \left[\frac{z_7}{3}\right] + 2, \quad z_5' = 8, \quad z_7' = z_7;$

c₂) $\quad z_3' = \left[\frac{z_7}{3}\right] + 1, \quad z_5' = 11, \quad z_7' = z_7$

mit einem aus beliebig vielen Elementarstreifen bestehenden Elementargürtel

$$\langle\alpha_1^{(\mu+1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_2^{(\mu+1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_3^{(\mu+1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_4^{(\mu+1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_5^{(\mu+1)}\rangle_6,$$
$$\langle\alpha_1^{(\mu+2)}\rangle_6,\ \langle\alpha_2^{(\mu+2)}\rangle_6,\ \langle\alpha_3^{(\mu+2)}\rangle_6,\ \langle\alpha_4^{(\mu+2)}\rangle_6,\ \langle\alpha_5^{(\mu+2)}\rangle_6,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\langle\alpha_1^{(\nu-1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_2^{(\nu-1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_3^{(\nu-1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_4^{(\nu-1)}\rangle_6,\ \langle\alpha_5^{(\nu-1)}\rangle_6.$$

Es ist aber die Anwendbarkeit der bei den Konstruktionen einer Lösung

$$x_3 = z_3 - \left[\frac{z_7}{3}\right] - \varrho_7,\ z_4,\ z_5,\ z_8,\ z_9,\ \dots,\ z_r$$

verwerteten Methoden an die einzige Bedingung gebunden, dafs auf dem aus Π_5'' abgeleiteten Polyeder $A_{n'}$ eine ausreichende Zahl von Elementarstreifen verfügbar ist. Dieselben Methoden werden daher auch an dem Polyeder A_{n_1} unmittelbar zur Anwendung gelangen können und dieses in ein Polyeder der Lösung überführen

$$z_3 > 0,\ z_4 \geqq 0,\ z_5 \geqq 0,\ z_7 > 0,\ \dots,\ z_r > 0.$$

Es sei noch bemerkt, dafs, falls $z_5 < 12$ ist, man die Schnitte $\langle\delta_1\rangle_3$, $\langle\delta_2\rangle_3$, $\langle\delta_3\rangle_3$, ... stets derart wählen kann, dafs $12 - z_5$ der ursprünglichen Grenzfünfecke von Π_5'' in Sechsecke übergehen. Beispielsweise wird man im Falle $z_5 = 0$ und $z_3 \geqq 4$ folgendermafsen konstruieren:

$$\langle\delta_1\rangle_3 \doteq (\alpha_1,\ \beta_5,\ \beta_1),\quad \langle\delta_2\rangle_5 \triangleq |\,\beta_3,\ \alpha_5'\,|,\quad |\,\beta_3,\ \alpha_1'\,|,$$
$$\langle\delta_3\rangle_3 \doteq (\alpha_2,\ \gamma_5,\ \gamma_1),\quad \langle\delta_4\rangle_5 \triangleq |\,\gamma_3,\ \alpha_5^{(\nu)}\,|,\quad |\,\gamma_3,\ \alpha_1^{(\nu)}\,|.$$

Hierdurch gehen die Fünfecke

$$\langle\alpha_1\rangle_5,\ \langle\beta_2\rangle_5,\ \langle\beta_1\rangle_5,\ \langle\beta_5\rangle_5,\ \langle\beta_4\rangle_5$$

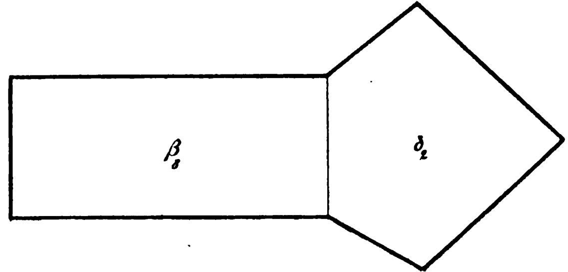
und

$$\langle\alpha_2\rangle_5,\ \langle\gamma_2\rangle_5,\ \langle\gamma_1\rangle_5,\ \langle\gamma_5\rangle_5,\ \langle\gamma_4\rangle_5$$

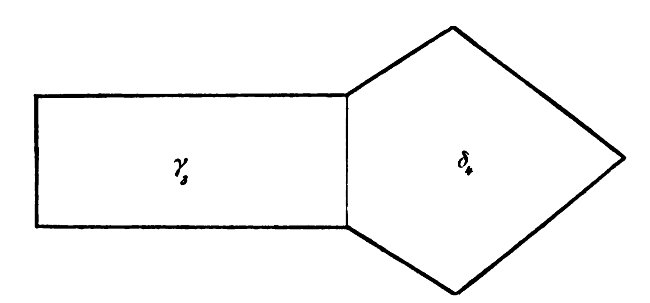
in ebensoviele Sechsecke über, während an die Stelle der beiden Fünfecke

$$\langle\beta_3\rangle_5 \quad\text{und}\quad \langle\gamma_3\rangle_5$$

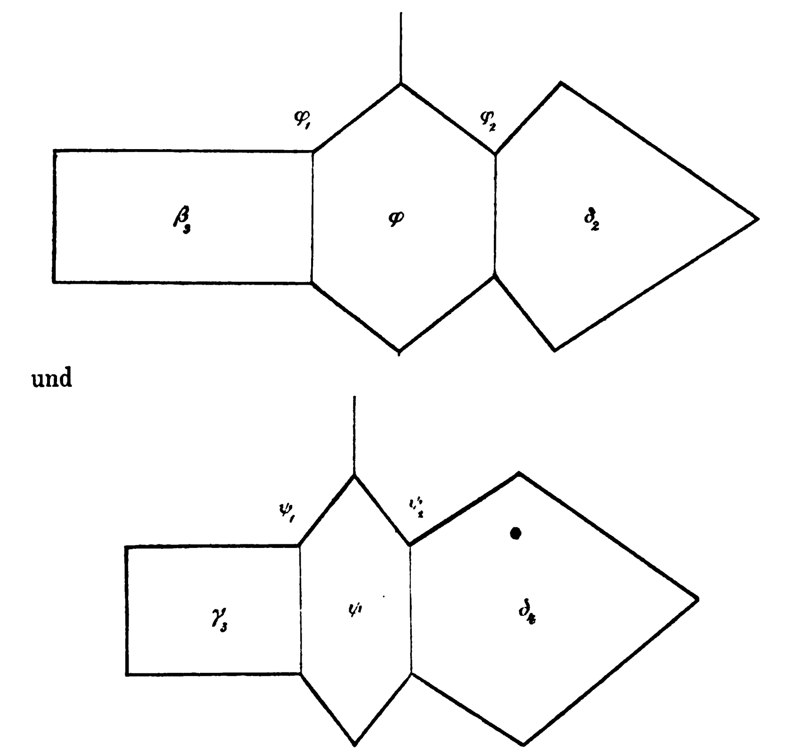
die Flächenpaare treten:



und



Unterwirft man darauf das Polyeder dem Prozesse Π_2, so resultieren die Flächentripel:



Indem man aber an diesen Tripeln die Operationen ausführt

$\langle\delta_5\rangle_5 \triangleq |\varphi, \varphi_1|, \; |\varphi, \varphi_2|$ und $\langle\delta_6\rangle_5 \triangleq |\psi, \psi_1|, \; |\psi, \psi_2|$,

erhält man die Flächenquadrupel



Alsdann vollenden die beiden weiteren Schnitte

$$\langle\delta_7\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\beta_3, \varphi, \delta_5) \quad \text{und} \quad \langle\delta_8\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\gamma_3, \psi, \delta_6)$$

die gesuchte Umformung.

Der gleiche Zweck kann öfters auch dadurch erreicht werden, dafs man von vorneherein statt des Pentagondodekaeders ein anderes passend gewähltes Polyeder des Stammes B_0 der Betrachtung zu Grunde legt.

Fafst man die Ergebnisse dieses Paragraphen zusammen, so kann man nunmehr folgenden allgemeinen und fundamentalen Satz aussprechen:

Theorem 24*). *Jedes positive und ganzzahlige Lösungssystem der charakteristischen Gleichung*

---

*) Der Satz besitzt ein interessantes Analogon in der ebenen Topologie. Zwischen den Anzahlen der Polygone verschiedener Gestalt, in welche die Ebene durch n Gerade allgemeiner Lage zerschnitten wird, bestehen die leicht zu erweisenden Relationen:

1) $$x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_n = 1 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2},$$

2) $$3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \cdots + nx_n = 2n(n-1),$$

wenn x_h die Anzahl der h-seitigen Polygone bezeichnet. Die Kombination beider Gleichungen ergiebt:

3) $$x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots - (n-4)\,x_n = 4.$$

Von dieser Gleichung, deren linke von der Zahl x_4 unabhängige Seite für alle allgemeinen ebenen Geradensysteme einen und denselben invarianten Wert hat, gilt der dem Theoreme 24 entsprechende Satz:

Jedes die Gleichung 3) befriedigende positive und ganzzahlige Wertesystem $x_3, x_5, x_6, x_7, \ldots$ definiert in der Ebene mindestens ein und höchstens endlich viele topologisch verschiedene allgemeine Geradensysteme.

Die Invarianz des Ausdruckes

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - 3x_9 - \cdots$$

für alle allgemeinen Euler'schen Polyeder ist bereits von Cayley bemerkt worden, dessen bezügliche Abhandlung in den „Manchester Memoirs, pag. 248, Vol. 1, Serie 3“ dem Verfasser jedoch nicht zugänglich gewesen. Die Cayley'schen Resultate finden sich zum Teil wiedergegeben in „Clifford, Mathematical papers, pag. 172“.

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots$$

definiert einen Stamm allgemeiner Polyeder.

Nach diesem Satze ist die Anzahl der zu einem Bereiche B_m gehörigen Polyederstämme gleich dem Produkte aus den Anzahlen der positiven und ganzzahligen Lösungen der beiden Gleichungen:

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - 12 = m = x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots.$$

Diese zwei fraglichen Anzahlen, welche nach *Euler* (Introductio in analysin Liber I Cap. 16) angeben, auf wie viele verschiedene Arten die Zahlen $m + 12$ und m in Summen von resp. höchstens drei und von beliebig vielen ungleichen positiven ganzen Summanden zerlegt werden können, lassen sich für jeden Wert von m durch ein einfaches Rekursionsverfahren berechnen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

Das Theorem 24 ist nur ein Spezialfall des folgenden allgemeineren, die Gesamtheit der konvexen Polyeder betreffenden Satzes:

24a. *Jedes positive und ganzzahlige Lösungssystem*

$$x_3', x_4', x_5', x_7', x_8', x_9', \ldots$$

der Gleichung

1) $$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - \cdots = 12 + 2\varrho,$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

kann stets und auf unendlich mannigfaltige Weise durch ein von ϱ^{tem} *Grade singuläres konvexes Polyeder veranschaulicht werden.*

Es mag hier der bezügliche Beweis nur unter der einschränkenden Voraussetzung $x_5' \overline{\overline{>}} 2\varrho$ gegeben werden, ein Fall, der mit verhältnißmäßiger Einfachheit ausreichende Allgemeinheit der Behandlung verbindet.

Man zerlege die Zahl x_5' in die beiden anderen

$$y_5' = x_5' - \varrho \quad \text{und} \quad z_5' = \varrho$$

und suche ein die Gleichung

$$x_7 + 2x_8 + 3x_9 + \cdots = \varrho$$

befriedigendes positives und ganzzahliges Wertesystem

$$y_7', y_8', y_9', \cdots.$$

Dasselbe bestimmt zusammen mit dem Systeme

$$x_3', x_4', y_5', x_7', x_8', x_9', \dots$$

ein entsprechendes Lösungssystem

$$x_3', x_4', y_5', x_7' + y_7', x_8' + y_8', \dots$$

der Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - \cdots = 12,$$

welches letztere folglich einen Stamm allgemeiner Polyeder definiert. — Aus diesem greife man ein beliebiges Individuum A_n heraus und unterwerfe es so oft, etwa zweimal, dem Prozesse Π_1 bzw. Π_2, dafs zwei Grenzflächen $\langle\alpha_i\rangle$ und $\langle\alpha_k\rangle$ des ursprünglichen Polyeders in dem abgeleiteten A_ν durchweg verschiedene Seitenflächen haben. Darauf wähle man $y_m' \, (m = 7, 8, \dots)$ m-seitige Grenzpolygone von A_ν und variiere das Polyeder sich selbst isomorph so stetig im Raume, dafs von den m Kanten eines jeden genau $m - 6$ ausscheiden, und die durch sie gehenden Sechsecke in ebensoviele Fünfecke übergehen. In Folge dessen werden, je nachdem die $m - 6$ Kanten einer dieser Flächen einen einzigen oder mehrere aus resp. $m_1, m_2, \dots$ Kanten bestehende Züge bilden, entweder $m - 5$ oder resp. $m_1 + 1, m_2 + 1, \dots$ getrennte dreikantige Ecken in je eine singuläre zusammenrücken. — Die angegebene Umformung eines Grenz-m-Eckes in ein Grenzsechseck wird also einerseits den gleichzeitigen Übergang von $m - 6$ Grenzsechsecken in eben soviele Grenzfünfecke, andererseits das Eintreten einer Singularität $m - 6^{\text{ten}}$ Grades bedingen. Entsprechend den ausgewählten und transformierten Grenzflächen von A_ν wird das aus der stetigen Variation von A_ν hervorgehende Polyeder $A_{\nu'}$ statt der $y_7' + y_8' + \cdots$ transformierten Polygone ebensoviele Sechsecke, anstatt $y_7' + 2y_8' + 3y_9' + \cdots$ Sechsecken von A_ν ebensoviele Fünfecke und schliefslich eine gewisse Anzahl eine Singularität ϱ^{ten} Grades repräsentierender singulärer Ecken aufweisen, so dafs $A_{\nu'}$ die vorgeschriebene Lösung der Gleichung 1) zur Anschauung bringt.

Die bei der hier entwickelten Konstruktion einer speziellen Lösung der Gleichung 1) angewandten Prinzipien sind auch für die Konstruktion einer allgemeinen Lösung mafsgebend.

Man bestimmt aus letzterer zuerst wiederum eine passende Lösung der Gleichung

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 - x_7 - 2x_8 - \cdots = 12,$$

konstruiert ein dieselbe darstellendes allgemeines Polyeder und transformiert letzteres teils durch die Prozesse Π_1, Π_2 und darauf erfolgender stetiger Variation des entstehenden in ein singuläres Polyeder, teils — und das ist ein weiteres wesentliches Prinzip — durch vor und nach Vollzug der Erweiterungsprozesse an dem jeweiligen Körper zweckmäſsig ausgeführte singuläre Fundamentalschnitte.

§ 29. Die Polyederfamilien eines gegebenen Stammes.

Es sei innerhalb des Bereiches B_m ein Polyederstamm definiert durch das Wertesystem

$$z_3,\ z_4,\ z_5,\ z_7,\ z_8,\ \ldots,\ z_r.$$

Die Aufgabe, die verschiedenen Familien dieses Stammes zu bestimmen, ist dann gleichbedeutend mit der anderen, eine allgemeine Konstruktionsmethode zu entwickeln, nach welcher aus den obigem Wertesysteme entsprechenden Stammflächen

$$\langle\alpha_1'\rangle_3,\ \langle\alpha_2'\rangle_3,\ \ldots,\ \langle\alpha_{z_3}'\rangle_3,\quad \langle\alpha_1''\rangle_4,\ \langle\alpha_2''\rangle_4,\ \ldots,\ \langle\alpha_{z_4}''\rangle_4,$$

$$\langle\alpha_1'''\rangle_5,\ \langle\alpha_2'''\rangle_5,\ \ldots,\ \langle\alpha_{z_5}'''\rangle_5,$$

$$\langle\alpha_1^{(4)}\rangle_7,\ \langle\alpha_2^{(4)}\rangle_7,\ \ldots,\ \langle\alpha_{z_7}^{(4)}\rangle_7,\ \ldots,\ \langle\alpha_1^{(r-3)}\rangle_r,\ \langle\alpha_2^{(r-3)}\rangle_r,\ \ldots,\ \langle\alpha_{z_r}^{(r-3)}\rangle_r$$

und aus einer nicht näher bestimmten Anzahl von Sechsecken

$$\langle\beta_1\rangle_6,\ \langle\beta_2\rangle_6,\ \ldots,\ \langle\beta_\mu\rangle_6$$

$$\mu = 0, 1, 2, \ldots$$

alle möglichen irreducibelen Polyeder zusammengesetzt werden.

Die wesentlichen Gesichtspunkte für eine vollständige Erledigung dieses Problemes ergeben sich aus folgenden Überlegungen.

Bei allen Polyedern des Stammes, im Besonderen also auch bei den gesuchten Stammpolyedern, kann man rücksichtlich der gegenseitigen Lage der M Stammflächen vier Hauptfälle unterscheiden:

I. Entweder setzen dieselben die vollständige Oberfläche eines Polyeders zusammen;

II. oder sie bilden m isolierte einfach berandete Bestandteile S_i,

$$m = 1, 2, \ldots, M;$$

III. oder sie bestimmen eine oder mehrere isolierte mehrfach berandete Flächen F_i;

IV. oder sie konstituieren eine Anzahl isolierter einfach berandeter Bestandteile S_i und eine Anzahl isolierter mehrfach berandeter Flächen F_i.

Alle Polyeder der ersten Gruppe stellen an sich Stammpolyeder dar.

Die Polyeder der drei übrigen Gruppen sondern sich wiederum in je eine ganz bestimmte endliche Anzahl von Untergruppen. Diejenigen der zweiten Hauptgruppe werden charakterisiert:

a) durch die Anzahl m der isolierten Bestandteile S_i,

b) durch die Art der Verteilung der M Stammflächen auf diese m Bestandteile,

c) durch die Zusammensetzungsweise der zu einem Bestandteile gehörigen Grenzpolygone.

Bei den Polyedern der dritten und vierten Hauptgruppe compliciert sich die Bestimmung der Untergruppen noch dadurch, dafs bei gleicher Anzahl von Flächen S_i und F_i Verschiedenheiten in deren gegenseitiger Lage in Betracht zu ziehen sind. In jedem Falle resultiert aber stets nur eine *endliche* Anzahl von Untergruppen, die ohne besondere Schwierigkeiten der Reihe nach angegeben werden können.

Die nähere Betrachtung einer der Gruppen II, III, IV zeigt sogleich, dafs nicht alle Untergruppen durch Stammpolyeder realisierbar sind, vielmehr innerhalb derselben noch eine engere Auswahl stattzufinden hat. Denn hat man beispielsweise irgend ein Polyeder der zweiten Gruppe und reduciert dessen Oberfläche durch Ausscheidung ihrer m isolierten Bestandteile S_i auf eine m-fach berandete, nur Sechsecke enthaltende Fläche $F_m\langle 6\rangle$, so besteht gemäfs dem § 21 entwickelten Theoreme über die Charakteristiken der Randpolygone P_i der ausgeschiedenen Flächen S_i die Relation:

$$C_1(P_1) + C_2(P_2) + \cdots + C_m(P_m) = 2 \cdot 3(m - 2).$$

Die Zusammensetzung der M Stammflächen $\langle \alpha'_h \rangle$ zu den S_i mufs demnach im Einklange mit dieser Relation stehen, während alle anderen Kombinationen aufser Betracht bleiben.

Ich behaupte, *dafs zu einem, den vorstehenden Angaben entsprechend bestimmten Systeme isolierter Flächen*

$$S_1, S_2, \ldots, S_m$$

nur eine endliche Anzahl irreducibeler isomorph berandeter Flächen $F_m\langle 6 \rangle$ *existiert.*

Zum Beweise denke man sich alle möglichen zugehörigen Flächen $F_m^{(h)}\langle 6 \rangle$ construiert und so in eine Reihe geordnet

$$F'_m\langle 6 \rangle, \; F''_m\langle 6 \rangle, \; F'''_m\langle 6 \rangle, \; \cdots,$$

dafs jede folgende nicht weniger Sechsecke als die vorhergehende umfafst. Man kann dann mit Hilfe von genau denselben Schlüssen, welche in § 21 die Endlichkeit der zu einem Elementarnetze gehörigen Erweiterungen ergeben haben, in genau derselben Weise wie dort zeigen, dafs, wenn die Anzahl der Sechsecke einer Fläche $F_m^{(h)}$ eine ganz bestimmte endliche Zahl M_1 übersteigt, die Fläche aus einer vorhergehenden Fläche $F_m^{(h-h_1)}$ durch Elementarerweiterung erzeugt werden kann, dafs somit die ersten M_1 Flächen der aufgestellten Reihe alle irreducibelen, die folgenden aber nur reducibele Flächen darstellen. Weil aber diese Überlegung für jede Gruppierung der M Stammflächen gilt, so resultiert der allgemeine Satz:

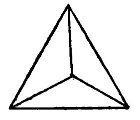
Theorem 26. *Die Anzahl der zu einem beliebigen Polyederstamme gehörigen Familien ist endlich.*

Unter Anwendung der hier abgeleiteten Methoden und Kriterien findet man beispielsweise:

I) als Stammpolyeder der Familie

$$x_3 = 4, \; x_4 = x_5 = x_7 = x_8 = \cdots = 0$$

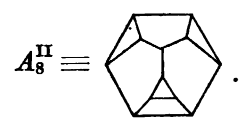
das einzige Vierflach



II) als Stammpolyeder der Familie

$$x_3 = 3,\; x_4 = 1,\; x_5 = 1,\; x_7 = x_8 = \cdots = 0$$

das Achtflach



Von der Richtigkeit der vorstehenden Angaben überzeugt man sich folgendermafsen:

I. Jedes nur aus Grenzsechsecken $\langle\alpha\rangle_6$ und vier Grenzdreiecken $\langle\alpha\rangle_3$ zusammengesetzte allgemeine Polyeder genügt der § 13 gegebenen Definition eines enthaltenden oder reducibelen Polyeders. Das Tetraeder ist daher der einzige irreducibele Körper des Stammes

$$x_3 = 4\,,\;\; x_4 = x_5 = x_7 = \cdots = 0.$$

II. Ein Polyeder des Stammes

$$x_3 = 3\,,\;\; x_4 = 1\,,\;\; x_5 = 1\,,\;\; x_7 = x_8 = \cdots = 0$$

wird die fünf Stammflächen

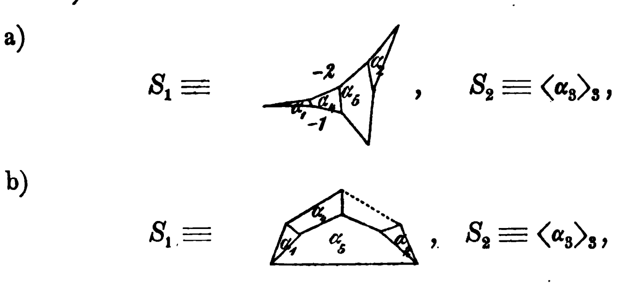
$$\langle\alpha_1\rangle_3,\; \langle\alpha_2\rangle_3,\; \langle\alpha_3\rangle_3,\; \langle\alpha_4\rangle_4,\; \langle\alpha_5\rangle_5$$

nach Ausschlufs derjenigen Kombinationen, bei welchen zwei Grenzdreiecke einander oder das Grenzviereck seiten und durch welche ein Tetraeder bzw. ein Pentaeder bestimmt wird, stets in einer der folgenden fünf Zusammensetzungen enthalten:

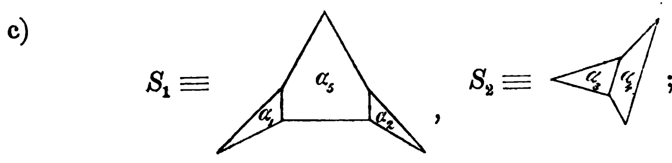
1) In zwei isolierten Bestandteilen

a) $S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$,

b) $S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$,



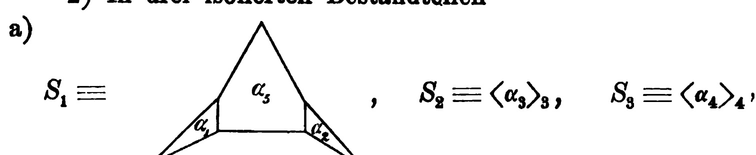
c) $S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv$ [Figur];



2) In drei isolierten Bestandteilen

a)

$S_1 \equiv$



, $S_2 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_4\rangle_4$,

b)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$,

c)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$,

d)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$,

e)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv$ [Figur], $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$;

3) In vier isolierten Bestandteilen

a)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$, $S_4 \equiv \langle\alpha_5\rangle_5$,

b)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$, $S_4 \equiv \langle\alpha_4\rangle_4$,

c)

$S_1 \equiv$ [Figur], $S_2 \equiv \langle\alpha_1\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_4 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$;

4) In fünf isolierten Bestandteilen

$S_1 \equiv \langle\alpha_1\rangle_3$, $S_2 \equiv \langle\alpha_2\rangle_3$, $S_3 \equiv \langle\alpha_3\rangle_3$, $S_4 \equiv \langle\alpha_4\rangle_4$, $S_5 \equiv \langle\alpha_5\rangle_5$.

Entsprechend den drei Fällen 1) hat man

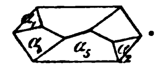
a, b) $C(P(S_1)) = -3$, $C(P(S_2)) = +3$,

c) $C(P(S_1)) = -1$, $C(P(S_2)) = +1$.

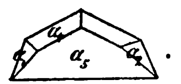
In allen drei Fällen gilt also, wie erforderlich

$$C(P(S_1)) + C(P(S_2)) = 2 \cdot 3 \cdot (m - 2) = 0.$$

Ein Polyeder des Typus 1 a) ist nichts desto weniger illusorisch, da die Fläche S_1 an und für sich schon ein Heptaeder der Form bestimmt:



Da nämlich S_1 von einem zwei, einem drei und einem vier Kanten zählenden ebenen Kantenzuge berandet wird, und da der gesuchte Körper aufser S_1 und dem Dreiecke $\langle\alpha_3\rangle_3$ nur noch Grenzsechsecke enthalten soll, so müfste der letzte der drei genannten Kantenzüge offenbar auch zu der Berandung eines solchen Grenzsechseckes gehören. Bei der Allgemeinheit des Polyeders bestimmt dann aber der dreiteilige Kantenzug mit der fünften und der zweiteilige Kantenzug mit der sechsten Seite von $\langle\alpha_6\rangle_6$ einen vier- und einen dreikantigen ebenen Zug, so zwar, dafs beide Züge von derselben Ecke des Sechseckes $\langle\alpha_6\rangle_6$ nach der nämlichen Ecke des Fünfeckes $\langle\alpha_5\rangle_5$ führen. Folglich müssen sich ihre Ebenen in der Verbindungsgeraden dieser beiden Ecken schneiden, und hierdurch ist in der That das Heptaeder A_7 bestimmt. Auch ein Polyeder des Typus 1b) ist unmöglich, indem nämlich die Fläche S_1 an sich schon ein Hexaeder der Form definiert



Die Polyeder des Typus 1c) endlich sind in der That existent, und zwar fallen dieselben mit den oben angegebenen Stammpolyedern A_8^{I} und den aus ihm elementar abgeleiteten Körpern zusammen.

Ein Polyeder der Annahme 2a), sowie ein solches der Annahme 2c) ist allemal existent und reducibel, da das Stammpolyeder A_8^{II} in ihm enthalten ist.

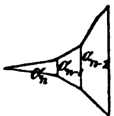
In den drei anderen Fällen 2b), 2c), 2d) hat man

b, c, d) $C(P(S_1)) = 0, \quad C(P(S_2)) = +3, \quad CP((S_3)) = +3,$

also, wie notwendig

$$C(P(S_1)) + C(P(S_2)) + C(P(S_3)) = 2 \cdot 3 \cdot (m-2) = 6.$$

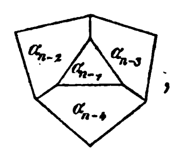
Angenommen zunächst, es existierte ein Körper A_n der Form 2b) mit der Fläche



und den beiden isolierten Dreiecken

$$\langle \alpha_1 \rangle_3, \langle \alpha_2 \rangle_3,$$

so geht dasselbe durch Ausscheidung der Fläche $\langle \alpha_n \rangle_3$ über in einen Körper A_{n-1} mit einer Fläche



dieser durch Ausscheidung der Fläche $\langle \alpha_{n-1} \rangle_3$ in einen Körper A_{n-2} mit einer Ecke

$$(\langle \alpha_{n-2} \rangle_4, \langle \alpha_{n-3} \rangle_4, \langle \alpha_{n-4} \rangle_4).$$

Durch weiteres Ausscheiden der Seitenflächen dieser Ecke resultiert aber ein Körper A_{n-5} mit der isomorphen Ecke

$$(\langle \alpha_{n-5} \rangle_4, \langle \alpha_{n-6} \rangle_4, \langle \alpha_{n-7} \rangle_4).$$

Man kann daher aus A_n stets einen Körper A_m ableiten, so dafs von den drei Seitenflächen seiner Ecke

$$(\langle \alpha_m \rangle_4, \langle \alpha_{m-1} \rangle_4, \langle \alpha_{m-2} \rangle_4)$$

mindestens eine und folglich zwei eines der beiden isolierten Dreiecke

$$\langle \alpha_1 \rangle_3, \langle \alpha_2 \rangle_3$$

seiten. Ein solcher Körper ist indessen illusorisch, da durch eine Ecke

$$(\langle \alpha_1 \rangle_3, \langle \alpha_m \rangle_4, \langle \alpha_{m-1} \rangle_4)$$

bereits ein Pentaeder unzweideutig bestimmt wird.

Angenommen ferner, es existierte ein Körper A_n der Form 2c) mit der Ecke

$$(\langle \alpha_{n-2} \rangle_5, \langle \alpha_{n-1} \rangle_4, \langle \alpha_n \rangle_3)$$

und den beiden isolierten Dreiecken

$$\langle\alpha_1\rangle_3, \ \langle\alpha_2\rangle_3,$$

so geht derselbe durch Ausscheidung der Fläche $\langle\alpha_n\rangle_3$ über in einen Körper A_{n-1} mit der Ecke

$$(\langle\alpha_{n-3}\rangle_5, \ \langle\alpha_{n-2}\rangle_4, \ \langle\alpha_{n-1}\rangle_3),$$

dieser durch Ausscheidung der Fläche $\langle\alpha_{n-1}\rangle_3$ in einen Körper A_{n-2} mit der Ecke

$$(\langle\alpha_{n-4}\rangle_5, \ \langle\alpha_{n-3}\rangle_4, \ \langle\alpha_{n-2}\rangle_3),$$

schliefslich der Körper A_{m+1} mit der Ecke

$$(\langle\alpha_{m-1}\rangle_5, \ \langle\alpha_m\rangle_4, \ \langle\alpha_{m+1}\rangle_3)$$

durch Ausscheidung der Fläche $\langle\alpha_{m+1}\rangle_3$ in einen Körper A_m mit der Ecke

$$(\langle\alpha_{m-2}\rangle_5, \ \langle\alpha_{m-1}\rangle_4, \ \langle\alpha_m\rangle_3),$$

wo mindestens eine der drei Flächen dieser Ecke eines der beiden Dreiecke

$$\langle\alpha_1\rangle_3, \ \langle\alpha_2\rangle_3$$

zur Seitenfläche hat. Ein solcher Körper ist aber nach 1b) unmöglich.

Vorausgesetzt endlich, der Annahme 2d) entspreche ein Polyeder A_n mit der Fläche

$S_1 \equiv$

und den beiden isolierten Dreiecken

$$\langle\alpha_1\rangle_3, \ \langle\alpha_2\rangle_3,$$

so geht dasselbe durch Ausscheidung der Fläche $\langle\alpha_n\rangle_3$ in ein Polyeder A_{n-1} mit den beiden Ecken über:

$$(\langle\alpha_{n-1}\rangle_4, \langle\alpha_{n-2}\rangle_4, \langle\alpha_{n-3}\rangle_5) \quad \text{und} \quad (\langle\alpha_{n-2}\rangle_4, \langle\alpha_{n-3}\rangle_5, \langle\alpha_{n-4}\rangle_5).$$

Durch weitere Ausscheidung der Fläche $\langle\alpha_{n-1}\rangle_4$ erhält man aber ein Polyeder A_{n-1} mit den den früheren isomorphen Ecken

$$(\langle\alpha_{n-2}\rangle_4, \langle\alpha_{n-3}\rangle_4, \langle\alpha_{n-4}\rangle_5) \quad \text{und} \quad (\langle\alpha_{n-2}\rangle_4, \langle\alpha_{n-4}\rangle_5, \langle\alpha_{n-5}\rangle_5).$$

Man kann daher durch Fortsetzung dieses Ausscheidungsprozesses aus A_n stets ein Polyeder A_m ableiten, so dafs von den vier Seitenflächen seiner zwei Ecken

$(\langle\alpha_m\rangle_4, \langle\alpha_{m-1}\rangle_4, \langle\alpha_{m-2}\rangle_5)$ und $(\langle\alpha_{m-1}\rangle_4, \langle\alpha_{m-2}\rangle_5, \langle\alpha_{m-3}\rangle_5)$ eine notwendig das Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$ bzw. $\langle\alpha_2\rangle_3$ zur Seitenfläche hat.

Nach Ausschlufs derjenigen beiden Fälle, in welchen entweder die Flächen $\langle\alpha_m\rangle_4$ und $\langle\alpha_{m-1}\rangle_4$ oder die Flächen $\langle\alpha_m\rangle_4$ und $\langle\alpha_{m-2}\rangle_5$ das Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$ seiten, Annahmen, durch welche ein Pentaeder bzw. ein Hexaeder bestimmt wird, hat man noch folgende zwei Möglichkeiten zu erörtern:

1) entweder geht $\langle\alpha_1\rangle_3$ durch die der Ecke

$$(\langle\alpha_{m-1}\rangle_4, \langle\alpha_{m-2}\rangle_5, \langle\alpha_{m-3}\rangle_5)$$

gegenüberliegende Seite des Fünfecks $\langle\alpha_{m-3}\rangle_5$,

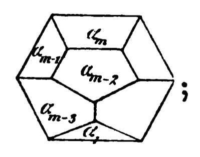
2) oder es bildet mit den beiden Flächen $\langle\alpha_{m-2}\rangle_5$ und $\langle\alpha_{m-3}\rangle_5$ die Ecke

$$(\langle\alpha_1\rangle_3, \langle\alpha_{m-2}\rangle_5, \langle\alpha_{m-3}\rangle_5).$$

Im ersten Falle bestimmen die fünf Flächen

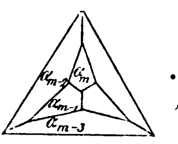
$$\langle\alpha_m\rangle_4, \langle\alpha_{m-1}\rangle_4, \langle\alpha_{m-2}\rangle_5, \langle\alpha_{m-3}\rangle_5, \langle\alpha_1\rangle_3,$$

da kein Grenzpolygon mehr als sechs Seiten zählt, gemäfs ihrer Zusammensetzung unzweideutig ein Oktaeder der Form



;

im zweiten Falle bestimmen dieselben fünf Flächen ein Heptaeder der Form



.

Es führen mithin alle unter (2d) *möglichen Annahmen auf einen inneren Widerspruch.*

Was die Polyeder der dritten Klasse anlangt, so sind diejenigen, welche den Bedingungen 3a und 3b entsprechen, allemal reducibel, da sie offenbar das Stammpolyeder A_8^{II} enthalten.

In Bezug auf die etwaigen Vertreter des Typus 3c) hat man zunächst:

$$C(P(S_1)) = 3,\ \ C(P(S_2)) = 3,\ \ C(P(S_3)) = 3,\ \ C(P(S_4)) = 3$$

und also, wie erforderlich:

$$C(P(S_1)) + C(P(S_2)) + C(P(S_3)) + C(P(S_4)) = 2\cdot 3\cdot (m-2) = 12.$$

Gesetzt, es existierte ein Polyeder A_n dieses Typus, und es sei auf demselben ein Polygon $P_{2,3}$ gezogen, welches seine Oberfläche S in eine die Bestandteile S_1, S_2 und in eine die Bestandteile S_3, S_4 enthaltende Fläche teilt, *so ist $P_{2,3}$ allemal ein Polygon der Charakteristik* 0.

Es gilt nämlich in Bezug auf die drei Polygone

$$P_{2,3},\ \langle\alpha_2\rangle_3,\ \langle\alpha_3\rangle_3$$

nach Theorem 18 die Gleichung

$$C(P_{2,3}) + C(\langle\alpha_2\rangle_3) + C(\langle\alpha_3\rangle_3) = 2\cdot 3$$

und da $C(\langle\alpha_2\rangle_3) = C(\langle\alpha_3\rangle_3) = +3$ ist, so auch, wie behauptet:

$$C(P_{2,3}) = 0.$$

Analoges gilt von jedem Polygone $P_{1,2}$, welches nur die Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$, und von jedem Polygone $P_{1,3}$, welches nur die Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_3\rangle_3$ einschließt.

Man reduciere nun A_n so weit, daß man alle zwischen etwaigen isomorphen Elementarpolygonen vorhandenen Elementargürtel aus seiner Oberfläche ausscheidet, und teile darauf letztere von dem Polygone $P(S_1)$ aus in Elementarstreifen

$$S',\ S'',\ S''',\ \ldots.$$

Die freien Randpolygone derselben, nämlich

$$P',\ P'',\ P''',\ \ldots$$

haben die Formen

$P' \equiv$ [Zickzacklinie mit den Ecken α_1', α_2', α_3', α_4', α_5'],

$P'' \equiv$ [Zickzacklinie mit den Ecken α_1'', α_2'', α_3'', α_4'', α_5'', α_6'', α_7'', α_8''],

$P''' \equiv$ [Zickzacklinie mit den Ecken α_1''', α_2''', α_3''', α_4''', α_5''', α_6''', α_7''', α_8''', α_9''', α_{10}''', α_{11}'''],

. . . .

Es mufs dann ein erster Elementarstreifen $S^{(h)}$ existieren, dessen freies Randpolygon $P^{(h)}$ mit *einem* der drei Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$, $\langle\alpha_3\rangle_3$, etwa mit $\langle\alpha_1\rangle_3$, *entweder eine oder zwei Kanten gemein hat.*

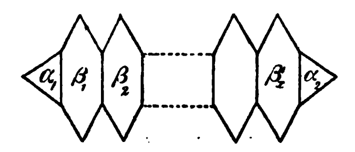
In dem ersten dieser beiden Hauptfälle ist das dem Polygone $P^{(h)}$ benachbarte Polygon

$$P(0, 6h + 8) \equiv \ldots$$

ein elementares mit einem Elementargürtel, der sich aus dem angrenzenden Elementarstreifen und einer das Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$ scheitelnden Fläche $\langle\alpha_i\rangle$ zusammensetzt. Weil aber A_n als der Voraussetzung nach irreducibel keinen Elementargürtel enthält, und weil die Fläche $\langle\alpha_i\rangle$ mit dem Randpolygone des angrenzenden Elementarstreifens einen vierkantigen Zug gemein hat, so bleibt nur die Möglichkeit übrig, dafs das Polygon $P^{(h)}$ noch mit einem zweiten Dreieck $\langle\alpha_2\rangle_3$ *eine* Kante gemein hat, und folglich das Nachbarpolygon besitzt:

$$P(-3, 6h + 9) \equiv \ldots .$$

Es wird aber die Fläche



von einem Normalpolygone $P_1(0, 2m)$ berandet. Soll daher A_n keinen an dasselbe grenzenden Normalgürtel enthalten, so mufs entweder eine der anstofsenden Flächen das dritte Dreieck $\langle\alpha_3\rangle_3$ sein, oder es mufs mindestens eins der beiden Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$ an die Fläche S_1 grenzen.

Unter der ersten Annahme wäre das Polygon

$$P(-6, 6h + 6) \equiv \cdots$$

Randpolygon einer geschlossenen nur Sechsecke enthaltenden Fläche. Daraus folgt aber, dafs der in dem Kantenzuge

a) $y = x + 1$, b) $y = x$

enthaltene andere

a)

b)

die Fläche berandet

a) , b) .

Hiernach müſste also entgegen der Voraussetzung die von dem Polygone P_1 berandete Fläche ein mindestens achtseitiges Polygon $\langle\alpha\rangle$ enthalten.

Der zweite oben vorgesehene Fall, daſs eines der beiden Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$ an die Fläche S_1 grenzt, kann gleichfalls nicht eintreten, da er auf die bereits als unmöglich erkannten Fälle 2b), 2c), 2d) führt.

In dem zweiten Hauptfalle, in welchem unter den von der Fläche S_1 aus gezählten Elementarstreifen S', S'', ... ein erster $S^{(h)}$ vorkommt, dessen freies Randpolygon $P^{(h)}$ mit einem Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$ *zwei* Kanten gemein hat, muſs das Randpolygon des um das Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$ erweiterten Elementarstreifens $S^{(h)}$ eine der beiden Formen haben:

1) $P(0, 6h + 6) \equiv$

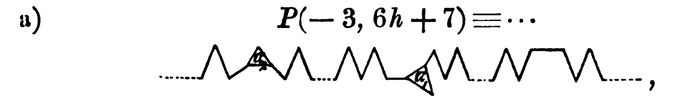
2) $\bar{P}(0, 6h + 6) \equiv$

$(p \leq q)$.

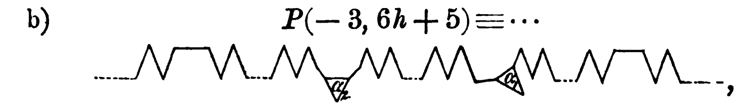
Dem Umstande, daſs der zu dem Elementarpolygone P gehörige Elementargürtel aus dem angrenzenden Elementarstreifen besteht, und aus der Irreducibilität von A_n folgt weiter, daſs das Polygon $P^{(h)}$ noch mit einem zweiten Dreieck $\langle\alpha_2\rangle_3$ eine bzw. zwei Kanten gemein haben muſs. Das Randpolygon des um die beiden Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$ und $\langle\alpha_2\rangle_3$ er-

weiterten Elementarstreifens $S^{(h)}$ fällt dann notwendig unter eine der folgenden fünf Formen:

a) $$P(-3, 6h+7) \equiv \cdots$$



b) $$P(-3, 6h+5) \equiv \cdots$$



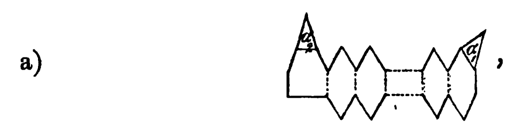
c) $$P(-3, 6h+5) \equiv \cdots$$

d) $$P(-3, 6h+5) \equiv \cdots$$

e) $$P(-3, 6h+5) \equiv \cdots$$

Man hat dann entsprechend auf A_n eine Fläche der Form

a)



b, c)

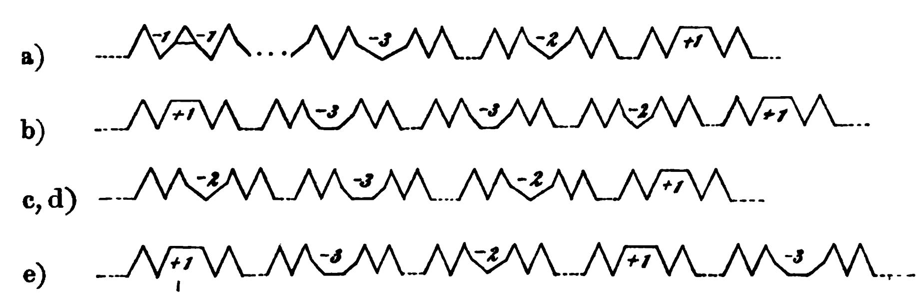
d)

e)

und diese wird von einem *Normal*polygone berandet.

Soll daher A_n keinen Elementargürtel enthalten, so mufs entweder eine der an das Normalpolygon grenzenden Flächen $\langle\alpha\rangle$ das dritte Dreieck $\langle\alpha_3\rangle_3$ sein, oder es mufs mindestens eines der beiden Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$ unmittelbar an die Fläche S_1 stofsen.

Unter der ersten allein noch in Betracht kommenden Annahme erhält man als Randpolygon des um die drei Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$, $\langle\alpha_3\rangle_3$ erweiterten Elementarstreifens $S^{(h)}$ ein Polygon $P(-6, 2m)$ der Form:

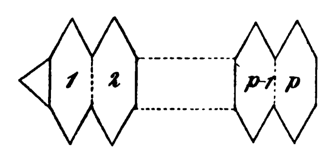


In allen diesen Fällen läfst sich aber auf ähnliche Weise, wie das schon früher einmal geschehen, der Schlufs ziehen, dafs der jenseits des betreffenden Polygones liegende Bestandteil der Oberfläche von A_n notwendig ein Grenzpolygon $\langle\alpha\rangle$ mit mehr als sechs Seiten enthält, während er der Voraussetzung nach sich durchgängig aus Sechsecken zusammensetzt.

Wenn endlich der um das Dreieck $\langle\alpha_1\rangle_3$ erweiterte Elementarstreifen $S^{(h)}$ das Randpolygon besitzt

$\bar{P}(0, 6h+6) \equiv$,

so kann man mittelst Umschreibung der Fläche



zu dem Nachbarpolygone übergehen:

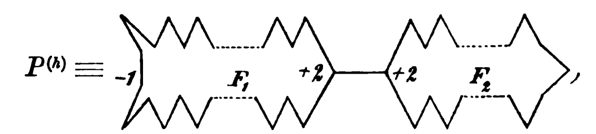
a) $\bar{P}'(0, 2m) \equiv$ ……,

b) $\bar{P}''(0, 2m) \equiv$ …… $(p < q)$ $(p = q)$ ……,

Da in dem einen wie in dem anderen Falle das resultierende Polygon ein Elementarpolygon ist und in dem angrenzenden Elementarstreifen einen Elementargürtel besitzt, ist es aus bereits erörterten Gründen auch hier mit der Voraussetzung unvereinbar, dafs an ein solches Polygon noch ein Dreieck $\langle\alpha_2\rangle_3$ grenzt. Die Annahme der Existenz eines Polygones $\bar{P}'$, $\bar{P}''$ ist daher gleichfalls illusorisch.

Den bisherigen die Unmöglichkeit eines Polyeders vom Typus 3c erweisenden Deduktionen liegt die stillschweigende Voraussetzung zu Grunde, dafs nicht nur die Randpolygone P', P'', ... der an die Fläche S_1 angrenzenden Elementarstreifen S', S'', ... sondern auch die Randpolygone der durch die Erweiterung letzterer um die Dreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$ entstehenden Flächen einteilige Kantenpolygone sind. Diese Annahme ist jedoch für das Endergebnis unwesentlich, da letzteres auch unter der allgemeineren Annahme coincidenter Kantenfolgen in einem solchen Polygone durch gewisse schon in § 22 verwertete Schlufsweisen übereinstimmend gefolgert wird.

Hat, um nur einen Fall herauszugreifen, das Randpolygon $P^{(h)}$ des Elementarstreifens $S^{(h)}$ die Form:



so sind die Charakteristiken der die beiden Flächen F_1, F_2 berandenden Polygone gegeben durch:

$$C(P(F_1)) = +1, \qquad C(P(F_2)) = +2.$$

Nun können die drei Grenzdreiecke $\langle\alpha_1\rangle_3$, $\langle\alpha_2\rangle_3$, $\langle\alpha_3\rangle_3$, wenn überhaupt, nur auf eine der folgenden vier Arten auf F_1 und F_2 verteilt sein:

1) F_1 enthält alle drei, F_2 kein Dreieck;

2) F_1 enthält $\langle\alpha_1\rangle_3$ und $\langle\alpha_2\rangle_3$, F_2 nur $\langle\alpha_3\rangle_3$;

3) F_1 enthält $\langle\alpha_1\rangle_3$, F_2 aber $\langle\alpha_2\rangle_3$ und $\langle\alpha_3\rangle_3$;

4) F_1 enthält kein, F_2 alle drei Dreiecke.

Da nach Voraussetzung in F_1 und F_2 aufser den drei Dreiecken nur noch Grenzsechsecke vorkommen, findet in allen vier Fällen das Theorem 18 Anwendung, und es würden daher demselben entsprechend die Gleichungen gelten:

1) $C(P(F_1)) - C\langle\alpha_1\rangle_3 - C\langle\alpha_2\rangle_3 - C\langle\alpha_3\rangle_3 = -2\cdot 3\cdot 2,$
$C(P(F_2)) = +6;$

2) $C(P(F_1)) - C\langle\alpha_1\rangle_3 - C\langle\alpha_2\rangle_3 = -2\cdot 3,$
$C(P(F_2)) - C\langle\alpha_3\rangle_3 = 0;$

3) $C(P(F_1)) - C\langle\alpha_1\rangle_3 = 0,$
$C(P(F_2)) - C\langle\alpha_2\rangle_3 - C\langle\alpha_3\rangle_3 = -2\cdot 3;$

4) $C(P(F_1)) = +6,$
$C(P(F_2)) - C\langle\alpha_1\rangle_3 - C\langle\alpha_2\rangle_3 - C\langle\alpha_3\rangle_3 = -2\cdot 3\cdot 2.$

Aus diesen Relationen berechnen sich aber:

1) $C(P(F_1)) = -3, \quad C(P(F_2)) = +6;$

2) $C(P(F_1)) = 0, \quad C(P(F_2)) = +3;$

3) $C(P(F_1)) = +3, \quad C(P(F_2)) = 0;$

4) $C(P(F_1)) = +6, \quad C(P(F_2)) = -3.$

Die so für die Charakteristiken der beiden Polygone erhaltenen vier Wertepaare sind sämtlich von dem wahren Wertepaar verschieden, und folglich ist die über die Form des Polygones $P^{(h)}$ gemachte Voraussetzung unhaltbar.

Es giebt also überhaupt kein Polyeder des Typus 3*c*.

Da schliefslich alle Polyeder der vierten Klasse, d. i. diejenigen Polyeder, bei denen die fünf Stammflächen isoliert liegen, evidentermafsen das Stammpolyeder $A_8{}^{\mathrm{I}}$ enthalten, so ist hiermit der vollständige Beweis erbracht, dafs letzteres das einzige Stammpolyeder des behandelten Polyederstammes darstellt.

Berichtigungen und Zusätze.

1) § 2 pag. 13: Der Euler'sche Satz gestattet, wie schon a. a. O.*) hervorgehoben worden, seine Ausdehnung auf die Gebietseinteilungen der Ebene durch Graden- und des Raumes durch Ebenensysteme. Es gilt nämlich der Satz:

Die Anzahlen r, f, s und e der verschiedenen (einander ausschliefsenden) Räume, Flächen, Strecken und Ecken, in und durch welche n beliebige Ebenen den Raum, einander und ihre Schnittgeraden teilen, genügen den Relationen:

1) *mit Bezug auf den Raum,*

$$r - f + s - e = 0,$$

2) *mit Bezug auf eine Ebene,*

$$f - s + e = 1,$$

3) *mit Bezug auf eine Gerade,*

$$s - e = 0.$$

Die Gültigkeit der dritten Gleichung liegt auf der Hand, da eine Gerade durch m diskrete Punkte allemal in ebensoviele Strecken geteilt wird.

Zum Beweise der zweiten Gleichung denke man sich um einen aufserhalb der teilenden Geraden gelegenen Punkt o der Ebene in letzterer einen veränderlichen Halbstrahl gedreht. Bei dem Durchgange desselben durch einen Schnittpunkt $\mathfrak{p}_i$ von zwei oder mehreren (etwa von r_i) Geraden, und nur bei einem solchen, wird der Strahl in genau $r_i - 1$ neue Flächen und in r_i neue Strecken eintreten. Nach einer vollen Umdrehung wird der Halbstrahl alle Ecken je einmal passiert

*) Vergl. des Verfassers „Ein Satz aus der Topologie". Mathem. Annal. Band 36.

haben und folglich sowohl in eine jede Strecke als in eine jede Fläche — die den Punkt o enthaltende allein ausgenommen — ein- und nur einmal eingetreten sein. Man hat daher:

$$f - 1 = \sum_{i=1}^{e} (r_i - 1),$$

oder, wie behauptet:

$$f - s + e = 1.$$

Ganz analog nehme man zum Beweise der ersten Gleichung eine aufserhalb der n gegebenen Ebenen α gelegene, keine der Schnittgeraden dieser schneidende und keinen ihrer Schnittpunkte enthaltende Gerade g zur festen Axe einer sich um sie drehenden Halbebene γ an. Da m in einem Punkte sich kreuzende Ebenen im Raume und auf einander ebensoviele ungeteilte Räume, Flächen und Geraden bestimmen, als ihre Durchschnitte mit einer $m + 1^{\text{ten}}$ nicht durch den Kreuzungspunkt gehenden Ebene in dieser und aufeinander ungeteilte Flächen, Strecken und einzelne Punkte fixieren, da ferner eine die Gerade g mit einem Schnittpunkte $\mathfrak{p}_i$ von m_i Ebenen α verbindende Ebene von den durch die m_i Ebenen α in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}_i$ bestimmten Teilgebieten sowohl m_i Räume als m_i Flächen schneidet, so sind die Anzahlen r_i, f_i und s_i aller Räume, Flächen und Strecken, in welche γ beim Durchgange durch $\mathfrak{p}_i$ neu eintritt, an die Relation gebunden:

$$r_i - f_i + s_i = 1.$$

Es tritt aber γ, von den durch ihre Axe g getroffenen n Räumen und n Flächen abgesehen, sowohl in jeden anderen Teilraum als in jede andere Teilfläche als auch in jede Teilstrecke einmal und nur einmal ein. Also gilt:

$$\sum_{i=1}^{e} (r_i - f_i + s_i) = e,$$

oder, wie behauptet:

$$r - f + s - e = 0.$$

Wird, wie in der oben citierten Abhandlung, jedes von der unendlich fernen Ebene durchschnittene Teilgebiet doppelt gezählt, werden also, algebraisch zu reden, Gebiete verschie-

dener Vorzeichensysteme unterschieden, so gilt, wenn die Anzahlen der Gebiete entgegengesetzter Vorzeichensysteme durch resp. r_1, f_1 und s_1 gegeben werden, entsprechend der Einteilung der unendlich fernen Ebene:

$$r_1 - f_1 + s_1 = 1,$$

und folglich nach Addition:

$$r' - f' + s' - e' = 1.$$

2) § 5 pag. 25: Die für die Konstruktion eines nur Kreuzungskanten enthaltenden Polyeders $A_{n\pm 1}$ aus einem analogen Körpers A_n gegebenen Bestimmungen sind folgendermafsen zu modificieren:

1) Die Ausführung eines Schnittes

$$\langle \alpha_{n+1} \rangle_5 \triangleq |\, \alpha_i,\ \alpha_k \,|,\ |\, \alpha_i,\ \alpha_l \,|$$

ist an die Bedingung gebunden, dafs die durch die zweiten Ecken der abgeschnittenen Kanten gehenden zwei Grenzflächen

$$\langle \alpha_p \rangle \quad \text{und} \quad \langle \alpha_q \rangle$$

nicht Seitenflächen sind.

2) Die Ausscheidung eines Grenzviereckes

$$\langle \alpha_n \rangle_4 \doteq |\, \alpha_i,\ \alpha_k \,|$$

ist dann und nur dann zulässig, wenn die Grenzflächen

$$\langle \alpha_i \rangle \quad \text{und} \quad \langle \alpha_k \rangle$$

keine dritte Scheitelkante besitzen.

3) Endlich führt die Ausscheidung eines Grenzfünfeckes

$$\langle \alpha_n \rangle_5 \triangleq |\alpha_i,\ \alpha_k \,|,\ |\, \alpha_i,\ \alpha_l \,|$$

stets nur in dem Falle zu einem Polyeder A_{n-1} des verlangten Typus, wenn kein einziges der drei Flächenpaare

$$\langle \alpha_l \rangle,\ \langle \alpha_p \rangle;\quad \langle \alpha_k \rangle,\ \langle \alpha_q \rangle;\quad \langle \alpha_p \rangle,\ \langle \alpha_q \rangle$$

ein Seitenflächenpaar bestimmt.

3) § 9 pag. 45. Es berechnen sich die Anzahlen y_h und z_h ($h = 3, 4, \ldots$) aus den x_h durch die Gleichungen:

$$y_3 = 2n - 4,\ y_4 = y_5 = 0,\ y_6 = x_3,\ y_{7+2h} = 0,\ y_{8+2h} = x_{4+h},$$
$$z_3 = 0,\ z_4 = 3n - 6,\ z_5 = 0,\ z_6 = 2n - 4 + x_3,\ z_{7+2h} = 0,$$
$$z_{8+2h} = x_{4+h},$$
$$(h = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

4) § 17 pag. 84 Anm.: Eine dritte ein allgemeines Polyeder mit durchweg $3h$-seitigen Grenzflächen ($h = 1, 2, \ldots$) in einen gleichartigen Körper umwandelnde Konstruktion wird, wenn $|\alpha_k, \alpha_l|$ eine Kante und $\langle\alpha_i\rangle$, $\langle\alpha_m\rangle$ die zu derselben gehörigen Scheitelflächen des gegebenen Polyeders bezeichnen, durch die Operationen dargestellt:

$$\langle\delta_1\rangle_4 \stackrel{\blacksquare}{-} |\alpha_k, \alpha_l, \qquad \langle\delta_2\rangle_4 \stackrel{\blacksquare}{-} |\delta_1, \alpha_l|,$$
$$\langle\delta_3\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\delta_1, \alpha_i, \delta_2), \quad \langle\delta_4\rangle_3 \stackrel{\bullet}{-} (\delta_1, \alpha_m, \delta_2).$$

5) § 21 pag. 165: Indem man den successiven Übergang eines stetig veränderten allgemeinen Polyeders in ein singuläres ins Auge faſst, kann man leicht diejenige Form des Theoremes (18) ableiten, welche dasselbe für einen Körper der letzteren Art annimmt. Zu dem Ende gehe man aus von der zwischen der Charakteristik des Randpolygones P' einer einfach zusammenhängenden allgemein polyedrischen Fläche S' und den Anzahlen $x_3', x_4', x_5', \ldots$ ihrer m' zugehörigen verschiedenförmigen Grenzpolygone bestehenden Relation:

$$C(P') = 3x_3' + 4x_4' + \cdots - 6(m' - 1).$$

Die Ausscheidungen von ϱ' auf ein oder mehrere (etwa μ') für sich zusammenhängende Systeme verteilten Kanten der Fläche S' und das damit verbundene gleichzeitige Zusammenrücken von $\varrho' + \mu'$ in μ' Ecken lassen den Ausdruck

$$3x_3' + 4x_4' + 5x_5' + \cdots$$

die Form annehmen:

$$3y_3' + 4y_4' + 5y_5' + \cdots + 2\varrho',$$

während die Anzahl

$$x_3' + x_4' + x_5' + \cdots = m' = y_3' + y_4' + y_5' + \cdots$$

der Grenzpolygone von S' unverändert bleibt.

Für die Charakteristik des Randpolygones einer einfach berandeten polyedrischen Fläche S' gilt daher allemal:

$$C(P') = 3y_3' + 4y_4' + 5y_5' + \cdots + 2\varrho' - 6(m' - 1),$$

wo ϱ' den Grad ihrer Singularität bezeichnet.

Ist nun die Oberfläche eines von ϱ^{tem} Grade singulären Euler'schen Polyeders A_n durch ein m-teiliges Netz

$$N_m \equiv P', P'', \ldots, P^{(m)}$$

in m einfach zusammenhängende Bestandteile

$$S', S'', \ldots, S^{(m)}$$

und zwar — den allgemeinsten Fall vorauszusetzen — in der Weise zerschnitten, dafs die Ecken des Netzes an und für sich eine Singularität ϱ_1^{ten} Grades absorbieren, so bestimmen sich zunächst die Charakteristiken der m Randpolygone $P^{(h)}$ der letzten Formel entsprechend durch die Gleichungen:

$$1)\quad C(P^{(h)}) = 3y_3^{(h)} + 4y_4^{(h)} + 5y_5^{(h)} + \cdots + 2\varrho^{(h)} - 6(m^{(h)} - 1),$$
$$(h = 1, 2, \ldots, m).$$

Die Addition derselben ergiebt:

$$2)\quad \sum_{h=1}^{m} C(P^{(h)}) = 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \cdots + 2(\varrho - \varrho_1) - 6(n - m),$$

wenn allgemein $x_p (p = 3, 4, \ldots)$ die Anzahl der p-seitigen Grenzpolygone von A_n angiebt. Weil aber für dieses Polyeder nach § 2 die Relation gilt:

$$3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + \cdots = 6n - 12 - 2\varrho,$$

so resultiert aus (2) *schliefslich die gesuchte Beziehung:*

$$3)\quad C(P') + C(P'') + \cdots + C(P^{(m)}) = 6(m - 2) - 2\varrho_1.$$

6) § 24 Schlufs: Wie die dreiflächigen Bestandteile eines Tetragonhexaeders (§ 16) und die sechsflächigen eines Pentagondodekaeders (§ 19), so zeigen auch die verschiedenen einfach zusammenhängenden allgemein polyedrischen Flächenbildungen aus den Polygonen eines jeden der durch das Theorem (22) ausgezeichneten Systeme IV, V, VI und VII die gemeinsame Eigenschaft, von je einem Elementarpolygone berandet zu werden.

7) § 28 pag. 217: Beispielsweise werden die drei Sechsecke

$$\langle\psi_1\rangle_6, \langle\psi_2\rangle_6, \langle\psi_3\rangle_6$$

1) durch die Operationen

$$\langle\delta_1\rangle_5 \triangleq |\varphi_3, \varphi_2|, |\varphi_3, \varphi_1|, \quad \langle\delta_2\rangle_3 \doteq (\delta_1, \psi_2, \varphi_3),$$
$$\langle\delta_3\rangle_5 \triangleq |\varphi_2, \delta_1|, |\varphi_2, \varphi_1|, \quad \langle\delta_4\rangle_3 \doteq (\delta_3, \psi_3, \varphi_2)$$

in drei Achtecke,

2) durch die Operationen

$$\langle\delta_1\rangle_5 \triangleq |\varphi_3, \varphi_2|, |\varphi_3, \varphi_1|, \quad \langle\delta_2\rangle_3 \doteq (\delta_1, \psi_2, \varphi_3),$$
$$\langle\delta_3\rangle_5 \triangleq |\varphi_1, \delta_1|, |\varphi_1, \varphi_2|, \quad \langle\delta_4\rangle_3 \doteq (\delta_3, \psi_3, \varphi_1),$$
$$\langle\delta_5\rangle_5 \triangleq |\varphi_2, \delta_1|, |\varphi_2, \delta_3|, \quad \langle\delta_6\rangle_3 \doteq (\delta_5, \psi_1, \varphi_2)$$

in drei Neunecke,

3) durch die Operationen

$$\langle\delta_1\rangle_5 \triangleq |\varphi_3, \varphi_2|, |\varphi_3, \varphi_1|, \quad \langle\delta_2\rangle_3 \doteq (\delta_1, \psi_2, \varphi_3),$$
$$\langle\delta_3\rangle_5 \triangleq |\varphi_1, \delta_1|, |\varphi_1, \varphi_2|, \quad \langle\delta_4\rangle_3 \doteq (\delta_3, \psi_2, \varphi_1),$$
$$\langle\delta_5\rangle_5 \triangleq |\varphi_2, \delta_1|, |\varphi_2, \delta_3|, \quad \langle\delta_6\rangle_3 \doteq (\delta_5, \psi_3, \varphi_2),$$
$$\langle\delta_7\rangle_5 \triangleq |\varphi_2, \delta_5|, |\varphi_2, \delta_6|, \quad \langle\delta_8\rangle_3 \doteq (\delta_7, \psi_1, \varphi_2)$$

in drei Zehnecke umgeformt.

Man bemerke gleichzeitig, dafs diese Methode, drei Grenzsechsecke durch Einführung von ausschliefslich drei- und sechsseitigen Grenzflächen in $3m$-Ecke überzuführen, dazu dienen kann, aus einem allgemeinen Polyeder der zweiten Klasse im Sinne des Theoremes (9) ein gleichartiges Polyeder abzuleiten.

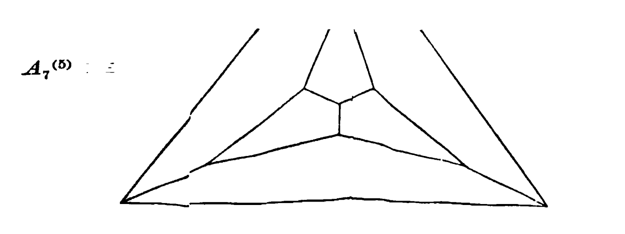
Die Zahl der jedesmal neu hinzutretenden Grenzflächen ist aber, ebenso wie bei den früher angegebenen entsprechenden Konstruktionen, auch hier stets eine gerade.

8) § 28 pag. 221: Der in der Anmerkung zu Theorem (24) ausgesprochene Satz über die allgemeinen ebenen Geradensysteme ist in dem folgenden allgemeineren enthalten:

Jedes positive und ganzzahlige Lösungssystem der Gleichung

$$x_3 - x_5 - 2x_6 - 3x_7 - \cdots = 4 + 2\delta$$

kann stets durch mindestens ein und höchstens eine endliche Anzahl topologisch verschiedener von δ^{tem} *Grade singulärer ebener Geradensysteme dargestellt werden.*



$A_7^{(5)}$





